# MB141 – 9. přednáška
# Lineární modely

Martin Čadek
s využitím přednášky Ondřeje Klímy pro předmět MB101

Jarní semestr 2021

# Cíl a osnova přednášky

V této přednášce si ukážeme, jak je možné znalosti o maticích, lineárních zobrazeních a vlastních číslech využít při vytváření jednoduchých matematických modelů některých procesů, ať se jedná o vývoj nějaké polulace nebo o změny pravděpodobnosti. Osnova přednášky je následující:

- Příklad populačního modelu (učebnice 3.18 str. 139)

prof. Slovák
Drsná matematika

- Leslieho model růstu
- Pozitivní a primitivní matice
- Markovovy procesy

# Příklad populačního modelu – stádo ovcí

- Stádo ovcí rozdělme do 5 věkových kategorií: nová jehňata (0-1 rok), stará jehňata (1-2 roky), mladé ovce (2-3 roky), ovce (3-4 roky) a staré ovce (4-5 roků).
- Počet kusů v čase $t$ (např. roky od začátku chovu) značíme $x_1(t)$ (nová jehňata), $x_2(t)$ (stará jehňata) atd. Stav stáda v čase $t$ je tedy $X(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t), x_5(t))^T$.
- Známe relativní roční změny:
  - Úhyn v jednotivých kategoriích:

    $x_5(t+1) = 0.6 \cdot x_4(t)$ $\qquad$ $x_4(t+1) = 0.7 \cdot x_3(t)$

    $x_3(t+1) = 0.8 \cdot x_2(t)$ $\qquad$ $x_2(t+1) = 0.95 \cdot x_1(t)$
  - Reprodukce: $x_1(t+1) = 0.2 \cdot x_2(t) + 0.8 \cdot x_3(t) + 0.6 \cdot x_4(t)$
- Tedy $X(t+1) = A \cdot X(t)$ s konstantní maticí $A$:

$x_1(t+1) = (0 \; 0.2 \; 0.8 \; 0.6 \; 0)$

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \\ x_5(t) \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.8 & 0.6 & 0 \\ 0.95 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0 \end{pmatrix}$$

$x_1($

$$X(1) = A\,X(0)$$

$$X(2) = A\,X(1) = A\cdot A\,X(0) = A^2\,X(0)$$

$$\vdots$$

$$X(n) = A^n\,X(0)$$

$$A^n = \underbrace{A\cdot A\cdot \ldots \cdot A}_{n\times\text{krát}}$$

Chování $X(n) = \begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ \vdots \\ x_5(n) \end{pmatrix}$ pro $n \to \infty$

# Stádo ovcí – pokračování

- Vlastní čísla matice $A$ jsou přibližně: $1.03$, $0$, $-0.5$ a další dvě komplexní $-0,27 + 0.74i$, $-0.27 - 0.74i$ s absolutními hodnotami $1.03, 0, 0.5, 0.78, 0.78$
- Libovolný počáteční stav je dán vektorem $X(0) = v \in \mathbb{R}^5$. Dále $X(1) = A \cdot X(0) = A \cdot v$, $X(2) = A \cdot X(1) = A \cdot A \cdot X(0)$ $= A \cdot A \cdot v = A^2 \cdot v$, atd. v čase $k$ bude stav populace dán $k$-tou mocninou matice $A$, tj. $X(k) = A^k \cdot v$.
- Označíme-li největší reálné vlastní číslo $\lambda$, v našem případě to je přibližně $1,03$, a příslušný vlastní vektor $u$, pak se pro zvětšující se $k$ bude stav stáda blížit nějakému násobku vektoru $\lambda^k u$. To znamená, že pro velká $k$ máme $A^k \cdot v \sim a \cdot \lambda^k u$. $\boxed{a \lambda^k u}$ $v = au + \cdots$
- Poměrná věková struktura stáda (tzv. generační distribuce) se bude blížit (konvergovat) k poměrům ve vlastním vektoru $u$.
- Zde $u$ je přibližně $(30, 27, 21, 14, 8)$. (Součet souřadnic je $100$, tj. vidíme generační distribuci populace.)

$A \quad 5 \times 5$

$$\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3 \quad \underbrace{\lambda_4 \quad \lambda_5}_{\in \mathbb{C}}$$

$$|\lambda_1| > |\lambda_2|, \ |\lambda_3| \ |\lambda_4| \ |\lambda_5| < 1$$

$$v = a u_1 + b u_2 + \dots$$

$$A^n v \longrightarrow \lambda_1^n a u_1$$

$$\searrow \vec{0} \quad |\lambda_1| < 0$$

$$\lambda_1 = 1 \qquad a u_1$$

$$\lambda_1 > 1 \qquad a \neq 0$$

$$\|A^n v\| \longrightarrow \infty$$

$A^n v$ má složky v poměru skoro
vektoru $u_1$

# Lineární iterované procesy

$X_n = A\, X_{n-1}$

- Procesy bývají popsány prostřednictvím lineární transformace pro jednotlivá časová období (linearizovaný model). Budeme chtít studovat jeho chování během delší doby.
- Například zkoumáme nějaký systém jednotlivců (pěstovaná zvířata, hmyz, buněčné kultury apod) rozdělený do $m$ skupin (třeba podle stáří, fází vývoje hmyzu apod.).
- Stav, závisející na okamžiku $t_n$, ve kterém systém pozorujeme, je tedy dán vektorem, který zapisujeme jako sloupec $X_n = (x_1(n), \dots, x_m(n))^T$.
- Lineární model vývoje takového systému je dán maticí $A$ tvaru $m \times m$, která zadává změnu z vektoru $X_n$ na vektor $\boxed{X_{n+1} = A \cdot X_n}$ při přechodu z času $t_n$ na čas $t_{n+1}$.

# Dravec a kořist

Uvažujme dva živočičné druhy, jeden z nich je dravec $D$ a druhý je jeho kořist $K$. Označme $X_n = (D_n, K_n)^T$ jejich počty po $n$ letech. Změna počtu probíhá podle tohoto lineárního modelu

$$D_{n+1} = 0,6D_n + 0,5K_n,$$
$$K_{n+1} = -pD_n + 1,2K_n,$$

kde $p$ je parametr (uvažujeme možnosti $p = 0,16$, $p = 0,175$, $p = 0,135$). Maticově

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,5 \\ -p & 1,2 \end{pmatrix} X_n = A \cdot X_n.$$

Zajímá nás vývoj této dvoudruhové populace v závislosti na parametru $p$. Důležitou roli v něm hrají vlastní čísla a vlastní vektory.

# Dravec a kořist - pokračování

Ty jsou následující:

1. $p = 0,16$: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0,8$, $u_1 = (5,4)^T$, $u_2 = (5,2)^T$.
2. $p = 0,175$: $\lambda_1 = 0,95$, $\lambda_2 = 0,85$, $u_1 = (10,7)^T$, $u_2 = (2,1)^T$.
3. $p = 0,135$: $\lambda_1 = 1,05$, $\lambda_2 = 0,75$, $u_1 = (10,9)^T$, $u_2 = (10,3)^T$.

Počáteční stav obou druhů můžeme napsat jako lineární kombinaci vlastních vektorů

$$X_0 = \begin{pmatrix} D_0 \\ K_0 \end{pmatrix} = \underline{a}u_1 + \underline{b}u_2.$$

$a, b \in \mathbb{R}$

Potom v čase $n$ je stav obou populací

$$X_n = A^n \cdot X_0 = A^n \cdot \begin{pmatrix} D_0 \\ K_0 \end{pmatrix} = A^n \cdot (au_1 + bu_2) = a\underline{A^n \cdot u_1} + b\underline{A^n \cdot u_2}$$

$$\underline{X_n} = a\underline{\lambda_1^n u_1} + b\underline{\lambda_2^n u_2}.$$

$A u_1 = \lambda_1 u_1$

$A^2 u_1 = A(Au_1) = A \lambda_1 u_1 = \lambda_1 A u = \lambda_1^2 u_1$

# Dravec a kořist - další pokračování

Pro jednotlivé parametry to pro velká $n$ znamená

1. $p = 0,16$: $\lambda_1^n = 1^n = 1$, $\lambda_2^n = 0,8^n \to 0$, tedy $X_n \to au_1 = a(5,4)^T$. Populace se stabilizuje.
2. $p = 0,175$: $\lambda_1^n = 0,95^n \to 0$, $\lambda_2^n = 0,85^n \to 0$, tedy $X_n \to (0,0)^T$. Populace mizí.
3. $p = 0,135$: $\lambda_1^n = 1,05^n \to \infty$, $\lambda_2^n = 0,75^n \to 0$, tedy pro $a \neq 0$ populace roste a poměr $D_n : K_n$ se blíží poměru dravců a kořistí ve vlastním vektoru $u_1$, tj. poměru $10 : 9$.

Příkladem lineárních procesů je *Leslieho model růstu* s maticí

$x_1(t+1) = f_1 x_1(t) + f_2 x_2(t) + \dots$

$x_2(t+1) = \tau_1 x_1(t)$

$$A = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & \dots & f_{m-1} & f_m \\ \tau_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \tau_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \tau_{m-1} & 0 \end{pmatrix},$$

$X(n+1) = A\,X(n)$

$A$ $m \times m$

$\tau_i \in [0,1]$ $\qquad f_i \geq 0$

ve které:

- $f_i$ označuje relativní plodnost příslušné věkové skupiny (ve sledovaném časovém období vznikne z $N$ jedinců v $i$–té skupině $f_i N$ jedinců nových, tj. ve skupině první);
- $\underline{1 - \tau_i}$ je relativní úmrtnost $i$-té skupiny během jednoho období.

  $\tau_i := 1 -$ úmrtnost $i$-té skupiny
- Platí $\tau_i \in [0,1]$ a $f_i \geq 0$. Lze dokázat, že <u>matice $A$ má jediné kladné reálné vlastní číslo</u>.

# Perronova–Frobeniova teorie

- Čtvercová matice $A$ je pozitivní, jestliže všechny její prvky jsou kladné.
- $A$ je primitivní, jestliže má pouze nezápornými prvky a existuje $k$ tak, že mocnina $A^k$ je pozitivní.

**Věta (Perronova – Frobeniova)**

*Nechť $A$ je primitivní matice. Pak platí:*

1. *existuje kladné reálné vlastní číslo $\lambda_m$ matice $A$ takové, že pro všechna ostatní vlastní čísla $\lambda$ platí $|\lambda| < \lambda_m$ – nazýváme jej dominantní vlastní číslo,*
2. *vlastní podprostor odpovídající $\lambda_m$ je generován vlastním vektorem se všemi souřadnicemi kladnými,*
3. *platí odhad $\min_i \sum_j a_{ij} \leq \lambda_m \leq \max_i \sum_j a_{ij}$. Slovně, uděláme-li součty čísel ve všech sloupcích, pak $\lambda_m$ leží mezi nejmenším a největším takovým součtem.*

# Aplikace na Leslieho model I

- Pokud je matice v Leslieho modelu primitivní, pak máme jediné dominantní vlastní číslo.

$5 \times 5$

- Náš příklad z úvodu přednášky nemá primitivní matici.
- Nutná podmínka je, aby bylo $\tau_i$ kladné pro všechna $i$ a také $f_m > 0$.
- Stačí, aby navíc $f_i, f_{i+1} > 0$ pro některý index $i$.
- Určitě je Leslieho matice primitivní, pokud jsou všechny parametry $f_j, \tau_i$ kladné.
- Přesnou charakterizaci není třeba vědět. Je otázkou pro teorii grafů.

# Aplikace na Leslieho model II

- Nechť je matice v Leslieho modelu primitivní, tj. máme jediné dominantní vlastní číslo.
- Existuje příslušný vlastní vektor $u$, který má kladné všechny složky. A tento vektor tvoří stabilní populaci.
- Pokud je dominantní vlastní číslo rovno $1$, pak každá počáteční generace konverguje k populaci, která je násobkem $u$.
- Pokud je dominantní vlastní číslo větší než $1$, pak každá počáteční populace expanduje (přemnoží se). Nicméně generační distribuce v populaci konverguje ke generační distribuci v stabilní populaci $u$.
- Pokud je dominantní vlastní číslo menší než $1$, tj. $\lambda_m < 1$, pak každá počáteční populace konverguje k nulové populaci (vymře).
- Předchozí platí i v případech, kdy matice sice není primitivní, ale má $m$ (počet populací) vlastních čísel a pouze dominantní je větší než $1$.

# Příklady na Leslieho model růstu

V Leslieho modelu řešíme úlohy:

- Zjistit tendenci vývoje v dlouhodobém horizontu (viz příklad s ovcemi):
  - vymření populace, stabilizace nebo expanze (přemnožení),
  - poměrná struktura populace.
- Určit vhodnou modifikaci parametrů, aby došlo ke stabilizaci populace:
  - odběr pěstovaných kusů na prodej,
  - nasazení přirozených nepřátel zabraňujících přemnožení v modelu dravec-kořist.

**Příklad**

V příkladu „stádo ovcí“ určete, kolik procent nových jehňat lze každý rok prodat, aby se stádo stabilizovalo.

# Příklad – stádo ovcí – kontrola populace prodejem

Leslieho matici $A = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.8 & 0.6 & 0 \\ 0.95 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0 \end{pmatrix}$ chceme změnit

na matici

$$A(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.8 & 0.6 & 0 \\ z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det(A(z) - \lambda E)$

$\det[A(z) - 1 \cdot E] = 0$

tak, aby $A(z)$ měla vlastní číslo rovno jedné, tj. aby platilo $\det(A(z) - E) = 0$. Tento determinant počítáme Laplaceovým rozvojem podle 2. řádku:

$$A(z) - E = \begin{pmatrix} -1 & 0.2 & 0.8 & 0 \\ z & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

# Příklad – stádo ovcí – pokračování

$\det(A(z) - E)$ se rovná

$$(-z)\begin{vmatrix} 0.2 & 0.8 & 0.6 & 0 \\ 0.8 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & -1 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} -1 & 0.8 & 0.6 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & -1 \end{vmatrix}$$

Další aplikací Laplaceova rozvoje na čtvrtý sloupec 1. matice a na 1. sloupec druhé matice dostaneme

$\det(A(z) - E) = 1 - z(0.2 + 0.8 \cdot 0.8 + 0.6 \cdot 0.7 \cdot 0.8) = 1 - z \cdot 1{,}176.$ $\stackrel{!}{=} 0$

Odtud $z = \frac{1}{1.176} \sim \boxed{0.85.}$

Proto $0.95 - \underset{0.85}{z} = 0.1 \sim$ 10% nově narozených jehňat lze prodat.

Pokud nechceme počítat se zlomky, tak můžeme vzít matici $10A(z)$ a počítat $\det(10A(z) - 10E)$.

$$\det\left(A(z)-E\right)=\det\begin{pmatrix} -1 & 0.8 & & \\ z & -1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} 0$$

$$\det\left(10\left(A(z)-E\right)\right)=\det\begin{pmatrix} -10 & 8 & & \\ 10z & -10 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

celá čísla

# Markovovy procesy

- Další případ lineárních procesů popisuje systémy, který se nachází v $m$ různých stavech s různou pravděpodobností.
- V určitém čase je systém ve stavu $s_i$ s pravděpodobností $p_i$. Tzn. popis systému v daném čase $t$ je dán vektorem $P(t) = (p_1, p_2, \ldots, p_m)^T$. Přičemž $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$, $p_i \in [0, 1]$.
- K přechodu z možného stavu $j$ do stavu $i$ dochází vždy (tj. nezávisle na čase) s pravděpodobností $a_{ij}$.
- Například pravděpodobnost stavu $s_1$ v čase $t+1$ se spočítá jako $p_1(t+1) = a_{11}p_1(t) + a_{12}p_2(t) + \ldots a_{1m}p_m(t)$.
- Rozdělení pravděpodobností pro čas $t+1$ je dáno vynásobením pravděpodobnostní maticí $A = (a_{ij})$, tj. $P(t+1) = A \cdot P(t)$.
- Přitom pro libovolné $j$ platí $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} = 1$. (Součet čísel v každém sloupci je 1.) Matice $A = (a_{ij})$ je tzv. stochastická.
- Takovému procesu říkáme Markovův proces.

# Markovův proces – příklad

**Příklad (Sledovanost televizí)**

Vysílají tři televizní stanice. Z veřejného výzkumu vyplynulo, že po jednom měsíci přejde $1/4$ diváků první stanice ke druhé stanici a $1/4$ diváků ke třetí stanici. Tzn. $1/2$ diváků zůstane u první stanice. Dále, že z diváků druhé stanice přejde $1/3$ diváků k první stanici a $1/3$ diváků ke třetí stanici. Konečně z diváků třetí stanice přejde $1/2$ diváků k první stanici a $1/2$ diváků ke druhé stanici. Popište časový vývoj počtu diváků sledujících dané stanice jako Markovův proces.

Matice Markovova procesu je

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

# Stochastické matice

Vlastnosti stochastických matic.

- Každý pravděpodobnostní vektor $p = (p_1, p_2, \dots, p_m)$ je opět zobrazen na vektor se součtem souřadnic jedna:

$$\sum_i \Big(\sum_j a_{ij} p_j\Big) = \sum_j \Big(\underbrace{\sum_i a_{ij}}_{1}\Big) p_j = \sum_j p_j = 1.$$

- Z toho také plyne, že součin dvou stochastických matic je stochastická matice. Proto je stochastická každá matice $A^k$, kde $A$ je stochastická a $k$ libovolné přirozené číslo.
- Protože je součet každého sloupce matice $A$ roven $1$, je součet každého sloupce matice $A - E$ roven $0$. Jsou proto řádky matice $A - E$ lineárně závislé a matice $A - E$ má nulový determinant.

  $\det(A-E) = 0$

- Tedy $|A - E| = 0$ a $\lambda = 1$ je vlastní číslo matice $A$ a musí k ní existovat vlastní vektor.

$p(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ $\quad p(1) = \det(A-E)$ $\left|\begin{pmatrix} a_{11}-1 & & \\ & a_{22}-1 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}\right|$

# Aplikace Perronovy-Frobeniovy věty

Důsledkem Perronovy-Frobeniovy věty pro Markovovy procesy s primitivní maticí, je

nejv. vl. číslo

- existence vlastního vektoru $P_\infty$ pro vlastní číslo 1, který je pravděpodobnostní vektor, tj. jeho souřadnice jsou nezáporné a jejich součet je 1.
- přibližování hodnoty iterací $\underline{A^k P(0)}$ k vektoru $P_\infty$ pro jakýkoliv počáteční pravděpodobnostní vektor $P(0)$.

Druhou vlastnost je také možné formulovat tak, že posloupnost matic $A^k$ konverguje, při zvětšujícím se $k$, k matici $B$, jež je tvořena stejnými sloupci, a to $P_\infty$.

stabilizuje se

$A^k e_1 = s_1(A^k) \to P_\infty$

$P(k) = A^k P(0) \rightsquigarrow 1 \cdot P_\infty$ vl. vektor k 1

$A^k \longrightarrow (P_\infty\ P_\infty \dots P_\infty) = B$

# Markovův proces – řešení příkladu

**Příklad (Sledovanost televizí)**

Vysílají tři televizní stanice. Z veřejného výzkumu vyplynulo, že po jednom měsíci přejde $1/4$ diváků první stanice ke druhé stanici a $1/4$ diváků ke třetí stanici. Tzn. $1/2$ diváků zůstane u první stanice. Dále, že z diváků druhé stanice přejde $1/3$ diváků k první stanici a $1/3$ diváků ke třetí stanici. Konečně z diváků třetí stanice přejde $1/2$ diváků k první stanici a $1/2$ diváků ke druhé stanici. Popište časový vývoj počtu diváků sledujících dané stanice jako Markovův proces.

Maticí Markovova procesu je

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}, \quad A^2 > 0$$

Matice má dominantní vlastní číslo $1$, příslušný vlastní vektor je $(4, 3, 2)$. Poměr diváků se ustálí na poměru $4 : 3 : 2$.

# Příklad bez Perronovy-Frobeniovy věty

## Příklad (Ruleta)

Hráč rulety má následující strategii: přišel hrát se 100 Kč. Vždy vsadí všechno, co aktuálně má. Sází vždy na černou (v ruletě je 37 čísel, z toho je 18 černých, 18 červených a nula). Hráč skončí, pokud nic nemá, nebo pokud získá 800 Uvažte tuto úlohu jako Markovův proces a napište jeho matici.

Jednotlivé stavy systému jsou dány aktuální hodnotou, kterou hráč má. Jsou to tedy částky 0, 100, 200, 400 a 800 Kč. Výsledná matice je:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & 1 \end{pmatrix},$$

kde $a = \frac{19}{37}$ a $b = \frac{18}{37}$.

# Příklad bez Perronovy-Frobeniovy věty – pokračování

A není primitivní

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & 1 \end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix} 1 & a+ab & a+ab & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 & b & 1 \end{pmatrix},$$

$A^n = A^3$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & a+ab+ab^2 & a+ab & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^3 & b^2 & b & 1 \end{pmatrix}, A^4 = A^3.$$

$A^5 = A^3 \quad A^6 = A^3$

- Proto $A^k = A^3$ pro libovolné $k \geq 3$. Matice $A$ není primitivní.
- Nicméně lze počítat $A^k \cdot P(0)$ pro libovolný počáteční pravděpodobnostní vektor $P(0)$. $a + b = 1$
- Zejména $A^k \cdot (0, 1, 0, 0, 0)^T = (a + ab + ab^2, 0, 0, 0, b^3)^T$.

# Příklad bez Perronovy-Frobeniovy věty – závěr

- Tedy po třech a více kolech hráč vyhraje 800 Kč s pravděpobností $(18/37)^3 \sim 0,1151$. S pravděpodoností $0,8849$ nebude mít nic.

# Požadavky

Příklad, který se může objevit na zkoušce:

- Leslieho model růstu – určit tendenci vývoje v dlouhodobém horizontu.
- Leslieho model růstu – modifikovat parametry tak, aby došlo ke stabilizaci populace.
- Markovovy procesy s primitivní maticí – určit limitní pravděpodobnostní rozložení (vektor).

Ve všech případech je třeba umět zkonstruovat matici ze slovního zadaní.

# Domácí úloha

## Příklad (9.1 – Leslieho populační model.)

JZD se zabývá chovem prasat. Chov se řídí půlročním cyklem a proto prasata rozdělují do čtyř věkových kategorií: malá selata (0–0,5 roku), větší selata (0,5–1 rok), mladší prasnice (1–1,5 roku) a starší prasnice (1,5–2 roky). Po ukončení půlročního období a přepočítání prasat ve všech kategorií se v novém období postupuje takto.

- Malá selata jsou rozdělena na samce, kteří se prodají, a na samice, které zůstávají v chovu, přičemž těchto samic je polovina z celkového počtu malých selat. Na konci nového období z nich jsou velká selata.
- Velká selata se pouze krmí, na konci nového období jsou ze všech mladší prasnice.
- Mladší prasnice se nechají zapustit a v průměru vrhnou 11 zdravých selat na jednu prasnici. Přitom 10% z mladších prasnic uhyne a 90% přežívá – na konci nového období jsou z nich starší prasnice.
- Starší prasnice se také zapustí a v průměru vrhnou 10 zdravých selat. Na konci nového období jsou však starší prasnice odeslány na jatka.

Určete, kolik procent velkých selat mohou během každého období prodat, aby měli stabilizovaný chov.

# Domácí úloha

## Příklad (9.2 – Markovův proces)

Rodina Novákova každoročně jezdí na celý srpen na dovolenou. Buď naloží auto kempingovým vybavením a cestuje po Evropě, nebo naloží kola a jedou k babičce na Vysočinu. Každý rok se rozhodují podle toho, jak trávili dovolenou poslední dva roky, a to částečně náhodně za použití klasické kostky. Rozhodují se podle následujících pravidel.

- Pokud byli poslední dva roky kempovat po Evropě, jedou na Vysočinu.
- Pokud byli poslední dva roky na Vysočině, tak jedou po Evropě.
- Pokud byli loni kempovat po Evropě a předloni u babičky, pak hází kostkou, a když padne liché číslo, tak jedou po Evropě, a když sudé číslo, tak jedou na Vysočinu.
- Pokud byli loni na Vysočině a předloni po Evropě, pak hází kostkou. Když padne 1 nebo 2, pak jedou na Vysočinu, jinak jedou po Evropě.

Tímto způsobem se o dovolené rozhodují celý život. V srpnu letošního roku je přijel do místa jejich bydliště navštívit kamarád, s kterým se neviděli po mnoho let. Soused, který věděl, že jsou buď na Vysočině nebo cestují po Evropě, ale nevěděl, kde byli poslední roky, jej poslal na Vysočinu. Určete, jaká je pravděpodobnost, že tam rodinu Novákovu najde.

# Domácí úloha

## Příklad (9.3 – Markovův proces)

Roztržitý profesor s sebou nosí deštník, ale s jistou pravděpodobností jej zapomene tam, odkud zrovna odchází. Ráno odchází z domova do práce, a protože bývá po ránu v kondici, pravděpodobnost, že deštník zapomene doma, je pouze $1/3$. Z práce chodí odpoledne do restaurace a pravděpodobnost, že deštník zapomene v práci, je $1/2$. V restauraci si dá pozdní oběd a jde domů, přičemž pravděpodobnost, že zapomene deštník v restauraci, je rovna $2/3$. Uvažujme pro jednoduchost, že nikam jinam po dostatečně dlouhou dobu profesor nechodí a že v restauraci zůstává deštník na profesorově oblíbeném místě, odkud si ho může následující den (pokud nezapomene) vzít.
Napište matici tohoto Markovova procesu. (Je vhodné za časovou jednotku vzít jeden den – od půlnoci do půlnoci.) Jaká je pravděpodobnost, že se po mnoha dnech bude deštník nalézat o půlnoci doma?