A. MB141, zkouška 8. 6. 2022

Příklad. 1A. [6 bodů] V $\mathcal{A}_3$ jsou dány tři body body $A = [2, 1, 1]$, $B = [2, 0, 3]$, $C = [1, -2, 3]$ a rovina π zadaná rovnicí

$$x_1 + x_2 - x_3 = -1.$$

(a) Napište parametrickou rovnici roviny ρ, která je určena body A, B, C. [2 body]
(b) Napište obecný (implicitní) popis roviny ρ pomocí rovnice. [2 body]
(c) Spočítejte průnik $\rho \cap \pi$. [2 body]

Řešení. **(a)** Parametrická rovnice roviny ρ je

$$A + a(B - A) + b(C - A) = [2, 1, 1] + a(0, -1, 2) + b(-1, -3, 2).$$

(b) Nejdříve najdeme homogenní rovnici pro zaměření roviny ρ. Pro hledané koeficienty c_1, c_2, c_3 rovnice $c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = 0$ musí platit soustava rovnic

$$-c_2 + 2c_3 = 0, \quad -c_1 - 3c_2 + 2c_3 = 0$$

Její řešení je $s(-4, 2, 1)$. Homogenní rovnice je

$$-4x_1 + 2x_2 + x_3 = 0.$$

Dosazením souřadnic bodu A do levé stran dostaneme rovnici pro π

$$-4x_1 + 2x_2 + x_3 = -5.$$

(c) Průnik $\rho \cap \pi$ spočítáme tak, že parametrické vyjádření roviny ρ

$$x_1 = 2 - b, \; x_2 = 1 - a - 3b, \; x_3 = 1 + 2a + 2b$$

dosadíme do rovnice pro π. Dostaneme rovnici

$$-3a - 6b = -3,$$

která má řešení $a = 1 - 2t$, $b = t$. Dosazením do parametrické rovnice pro ρ dostaneme parametrické vyjádření průniku, kterým je přímka

$$[2, 0, 3] + t(-1, -1, -2).$$

Jiným způsobem lze průnik spočítat řešením soustavy dvou rovnic z obecných popisů obou rovin. Matice soustavy je

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -4 & 2 & 1 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 6 & -3 & -9 \end{array}\right)$$

Řešením je přímka $[1/2, -3/2, 0] + p(1, 1, 2)$ totožná s předchozí. □

Bodování. Parametrické vyjádření roviny ρ za **2 body**. Soustava rovnic pro ρ, správný postup **1 bod**, výsledek **1 bod**. Vhodný postup výpočtu průniku **1 bod** , správný výsledek **1 bod**. □

Příklad. 2A. [6 bodů] Najděte reálná vlastní čísla a k nim příslušné vlastní vektory matice

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Na základě toho zjistěte, zda zobrazení $\varphi : \mathcal{E}_3 \to \mathcal{E}_3$ zadané předpisem $\varphi(x) = Ax$, kde $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ je sloupec standardních souřadnic v $\mathcal{E}_3$, je otočení kolem osy nebo symetrie podle roviny. V případě otočení určete osu otočení a kosinus úhlu otočení. V případě symetrie popište rovinu symetrie pomocí rovnice.

Řešení. Matice má charakteristický polynom

$$\det(A - \lambda E) = -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 = -(\lambda+1)^2(\lambda-1).$$

Vlastní číslo 1 má algebraickou násobnost 2 s vlastními vektory $a(0,1,1) + b(1,2,0)$.

Vlastní číslo -1 má algebraickou násobnost 1 s vlastními vektory $c(2,-1,1)$.

Jde tedy o symetrii podle roviny kolmé k vlastnímu vektoru $(2,-1,1)$ (aspoň trochu zdůvodnit), která prochází počátkem. Její rovnice je

$$2x_1 - x_2 + x_3 = 0.$$

□

Bodování. Výpočet charakteristického polynomu a nalezení vlastních čísel. **1 bod**

Výpočet vlastních vektorů k 1 **2 body**

Výpočet vlastních vektorů k -1 **1 bod**

Úvaha, že jde o symetrii podle roviny určené vlastním vektorem k -1 **1 bod**.

Rovnice roviny. **1 bod**.

□

Příklad. 3A. [6 bodů] Model růstu nějaké populace určené třemi generacemi je dán Leslieho maticí s parametrem $a \in [0, 1]$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & \frac{1}{3} \\ a & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Jestliže je poměr prvé, druhé a třetí generace v čase 3 roven $4 : 2 : 3$ a parametr $a = 1/2$, jaký bude poměr těchto generací v čase 4? [1 bod]
(b) Pro které hodnoty parametru a populace expanduje, pro které směřuje k vyhynutí a pro které se stabilizuje? [3 body]
(c) Určete dlouhodobé rozložení této populace pro parametr a, kdy se populace stabilizuje. [2 body]

Řešení. **(a)** Vynásobíme $A \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) Spočítáme charakteristický polynom

$$f(\lambda) = \det(A - \lambda E) = -\lambda^3 + 2a\lambda + \frac{1}{6}a.$$

Stabilita nastane, když 1 je vlastní číslo, tj.

$$f(1) = -1 + 2a + \frac{1}{6}a = 0.$$

Tedy pro $a = \frac{6}{13}$ je populace stabilní,

Pro $a \in (\frac{6}{13}, 1]$ je $f(1) > 0$, proto f má kořen > 1 a A má vlastní číslo > 1. Populace expanduje.

Pro $a \in [0, \frac{6}{13})$ je $f(1) < 0$, proto f má kořen < 1 a A má největší vlastní číslo < 1. Populace vymírá.

(c) Poměr generací je dán vlastním vektorem k vlastnímu číslu 1. Řešíme homogenní soustavu rovnic $(A - E)x = 0$ pro $a = 6/13$. Vlastní vektor je $(13, 6, 3)^T$.

□

Bodování. **(a)** Správný výpočet **1 bod**. Bez výpočtu **0 bodů**.

(b) Charakteristický polynom **1 body**.
Kritická hodnota parametru **1 bod**.
Expanze a vymírání **1 bod**.

(c) Soustava pro vlastní vektor **1 bod**.
Správný výsledek **1 bod**.

□

Příklad. 4A. Najděte všechna celá čísla, která vyhovují soustavě kongruencí

$$\begin{aligned} 3x &\equiv 4 \pmod{5}, \\ 4x &\equiv 2 \pmod{14}, \\ 7x &\equiv 8 \pmod{11}. \end{aligned}$$

Celý výpočet proveďte bez použití kalkulačky nebo jakéhokoliv softwaru a doprovoďte ho komentářem.

Řešení. 2. rovnici lze podělit dvěma včetně modulu. Dostáváme jednodušší

$$2x \equiv \ 1 \pmod{7}.$$

Vezmeme jednu rovnici, vyřešíme, dosadíme do druhé, vyřešíme, dosadíme do třetí a dostaneme celkový výsledek. Prvně počítejme modulo 5:

$$\begin{aligned} 3x &\equiv 4 \pmod{5}, \\ 6x &\equiv 8 \pmod{5}, \\ x &\equiv 3 \pmod{5}. \end{aligned}$$

Proto $x = 5a + 3$ dosadíme do upravené druhé rovnice a počítáme modulo 7:

$$\begin{aligned} 2(5a+3)x &\equiv 1 \pmod{7}, \\ 3a - 1 &\equiv 1 \pmod{7}, \\ 3a &\equiv 2 \pmod{7}, \\ 6a &\equiv 4 \pmod{7}, \\ -a &\equiv \ -3 \pmod{7}, \\ a &\equiv 3 \pmod{7}. \end{aligned}$$

Tedy $a = 7b+3$ a $x = 5(7b+3)+3 = 35b+18$. Dosadíme do třetí kongruence a počítáme modulo 11:

$$\begin{aligned} 7(35b+18 &\equiv 8 \pmod{11}, \\ 7(2b+7) &\equiv 8 \pmod{11}, \\ 3b+5 &\equiv \ * \pmod{11}, \\ 3b &\equiv 3 \pmod{11}, \text{ dělení } 3, \\ b &\equiv 1 \pmod{11}. \end{aligned}$$

Odtud $b = 11c + 1$ a dosazením do x dostaneme

$$x = 35(11c+1) + 18 = 385c + 35 + 11 = 385c + 53.$$

Řešením jsou všechna $x = 385c + 53$. □

Bodování. Počítání modulo 5 za **1 bod**
Počítání modulo 14 s dělením za **2 body**
Počítání modulo 11 za **1 bod**
Správný výsledek **2 body** □

B. MB141, zkouška 8. 6. 2022

Příklad. 1B. [6 bodů] V $\mathcal{A}_3$ jsou dány tři body body $P = [6, -1, 2]$, $Q = [9, -2, 2]$, $R = [6, 0, -1]$ a rovina σ zadaná rovnicí

$$-x_1 + x_2 + x_3 = -1.$$

(a) Napište parametrickou rovnici roviny β, která je určena body P, Q, R. [2 body]
(b) Napište obecný (implicitní) popis roviny β pomocí rovnice. [2 body]
(c) Spočítejte průnik $\beta \cap \sigma$. [2 body]

Řešení. **(a)** Parametrická rovnice roviny β je

$$P + a(Q - P) + b(R - P) = [6, -1, 2] + a(3, -1, 0) + b(0, 1, -3).$$

(b) Nejdříve najdeme homogenní rovnici pro zaměření roviny β. Pro hledané koeficienty c_1, c_2, c_3 rovnice $c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = 0$ musí platit soustava rovnic

$$3c_1 - c_2 = 0, \quad c_2 - 3c_3 = 0$$

Její řešení je $s(1, 3, 1)$. Homogenní rovnice je

$$x_1 + 3x_2 + x_3 = 0.$$

Dosazením souřadnic bodu P do levé stran dostaneme rovnici pro β

$$x_1 + 3x_2 + x_3 = 5.$$

(c) Průnik $\beta \cap \sigma$ spočítáme tak, že parametrické vyjádření roviny β

$$x_1 = 6 + 3a, \ x_2 = -1 - a + b, \ x_3 = 2 - 3b$$

dosadíme do rovnice pro σ. Dostaneme rovnici

$$-4a - 2b = 4,$$

která má řešení $a = -t$, $b = 2t - 2$. Dosazením do parametrické rovnice pro β dostaneme parametrické vyjádření průniku, kterým je přímka

$$[6, -3, 8] + t(-3, 3, -6) = [6, -3, 8] + s(1, -1, 2).$$

Jiným způsobem lze průnik spočítat řešením soustavy dvou rovnic z obecných popisů obou rovin. Matice soustavy je

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Řešením je přímka $[2, 1, 0] + p(1, -1, 2)$ totožná s předchozí. □

Bodování. Parametrické vyjádření roviny ρ za **2 body**. Soustava rovnic pro ρ, správný postup **1 bod**, výsledek **1 bod**. Vhodný postup výpočtu průniku **1 bod** , správný výsledek **1 bod**. □

Příklad. 2B. [6 bodů] Najděte reálná vlastní čísla a k nim příslušné vlastní vektory matice
$$B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$
Na základě toho zjistěte, zda zobrazení $\varphi : \mathcal{E}_3 \to \mathcal{E}_3$ zadané předpisem $\varphi(x) = Bx$, kde $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ je sloupec standardních souřadnic v $\mathcal{E}_3$, je otočení kolem osy nebo symetrie podle roviny. V případě otočení určete osu otočení a kosinus úhlu otočení. V případě symetrie popište rovinu symetrie pomocí rovnice.

Řešení. Matice má charakteristický polynom
$$\det(B - \lambda E) = -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 = -(\lambda + 1)^2(\lambda - 1).$$
Vlastní číslo 1 má algebraickou násobnost 2 s vlastními vektory $a(1, 0, 1) + b(2, 1, 0)$.
Vlastní číslo -1 má algebraickou násobnost 1 s vlastními vektory $c(-1, 2, 1)$.
Jde tedy o symetrii podle roviny kolmé k vlastnímu vektoru $(2, -1, 1)$ (aspoň trochu zdůvodnit), která prochází počátkem. Její rovnice je
$$-x_1 + 2x_2 + x_3 = 0.$$

□

Bodování. Výpočet charakteristického polynomu a nalezení vlastních čísel. **1 bod**
Výpočet vlastních vektorů k 1 **2 body**
Výpočet vlastních vektorů k -1 **1 bod**
Úvaha, že jde o symetrii podle roviny určené vlastním vektorem k -1 **1 bod**.
Rovnice roviny. **1 bod**.

□

Příklad. 3B. Model růstu nějaké populace určené třemi generacemi je dán Leslieho maticí s parametrem $b \in [0, 1]$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{3} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Jestliže je poměr prvé, druhé a třetí generace v čase 4 roven $2 : 6 : 7$ a parametr $b = 1/3$, jaký bude poměr těchto generací v čase 5? [1 bod]

(b) Pro které hodnoty parametru b populace expanduje, pro které směřuje k vyhynutí a pro které se stabilizuje? [3 body]

(c) Určete dlouhodobé rozložení této populace pro parametr b, kdy se populace stabilizuje. [2 body]

Řešení. **(a)** Vynásobíme $B \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(b) Spočítáme charakteristický polynom

$$f(\lambda) = \det(A - \lambda E) = -\lambda^3 + \frac{4}{6}\lambda + \frac{1}{2}b$$

Stabilita nastane, když 1 je vlastní číslo, tj.

$$f(1) = -1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{2}b = 0.$$

Tedy pro $b = \frac{2}{3}$ je populace stabilní,

Pro $b \in (\frac{2}{3}, 1]$ je $f(1) > 0$, proto f má kořen > 1 a B má vlastní číslo > 1. Populace expanduje.

Pro $b \in [0, \frac{2}{3})$ je $f(1) < 0$, proto f má kořen < 1 a B má největší vlastní číslo < 1. Populace vymírá.

(c) Poměr generací je dán vlastním vektorem k vlastnímu číslu 1. Řešíme homogenní soustavu rovnic $(B - E)x = 0$ pro $b = 2/3$. Vlastní vektor je $(6, 3, 2)^T$.

□

Bodování. **(a)** Správný výpočet **1 bod**. Bez výpočtu **0 bodů**.

(b) Charakteristický polynom **1 body**.

Kritická hodnota parametru **1 bod**.

Expanze a vymírání **1 bod**.

(c) Soustava pro vlastní vektor **1 bod**.

Správný výsledek **1 bod**.

□

Příklad. 4B. Najděte všechna celá čísla, která vyhovují soustavě kongruencí

$$4y \equiv 3 \pmod 7,$$
$$9y \equiv 6 \pmod{15},$$
$$8y \equiv 7 \pmod{11}.$$

Celý výpočet proveďte bez použití kalkulačky nebo jakéhokoliv softwaru a doprovoďte ho komentářem.

Řešení. 2. rovnici lze podělit třemi včetně modulu. Dostáváme jednodušší

$$3y \equiv\ 2 \pmod 5.$$

Vezmeme jednu rovnici, vyřešíme, dosadíme do druhé, vyřešíme, dosadíme do třetí a dostaneme celkový výsledek. Prvně počítejme modulo 7:

$$\begin{aligned} 4y &\equiv 3 \pmod 7,\\ 8y &\equiv 6 \pmod 7,\\ y &\equiv 6 \pmod 7. \end{aligned}$$

Proto $y = 7a + 6$ dosadíme do upravené druhé rovnice a počítáme modulo 5:

$$\begin{aligned} 3(7a+6)y &\equiv 2 \pmod 5,\\ a+3 &\equiv 2 \pmod 5,\\ a &\equiv 4 \pmod 5. \end{aligned}$$

Tedy $a = 5b + 4$ a $y = 7(5b + 4) + 6 = 35b + 34$. Dosadíme do třetí kongruence a počítáme modulo 11:

$$\begin{aligned} 8(35b+34) &\equiv 7 \pmod{11},\\ 8(2b+1) &\equiv 7 \pmod{11},\\ 5b+8 &\equiv 7 \pmod{11},\\ 5b &\equiv\ -1 \pmod{11},\\ 10b &\equiv\ -2 \pmod{11},\\ -b &\equiv\ -2 \pmod{11},\\ b &\equiv 2 \pmod{11}. \end{aligned}$$

Odtud $b = 11c + 2$ a dosazením do y dostaneme

$$x = 35(11c + 2) + 34 = 385c + 70 + 34 = 385c + 104.$$

Řešením jsou všechna $x = 385c + 104$. □

Bodování. Počítání modulo 7 za **1 bod**
Počítání modulo 15 s dělením za **2 body**
Počítání modulo 11 za **1 bod**
Správný výsledek **2 body** □