

PA167 Rozvrhování

13. května 2021

Ústní/písemná zkouška: 80 bodů

- **minimální počet bodů za zkoušku: 40 bodů**
- otázky z několika různých oblastí předmětu
- zkoušené znalosti budou vyžadovat porozumění, orientaci a přehled v problematice

Domácí úkoly: 20 bodů

- 2x úkol za 10 bodů
- **minimální počet bodů za domácí úkoly: 8 bodů**
- úkoly zadány na přednášce a mailem, řešení do přednášky za dva týdny
- postup řešení musí být součástí odevzdaného úkolu

Bonusové body: až 2 body za aktivní účast na 1 videokonferenci

- reakce na předem připravené i další dotazy na videokonferenci
- diskuse/otázky studentů na videokonferenci

Hodnocení: A 90 a více, B 80-89, C 70-79, D 60-69, E 50-59

- **Web předmětu:** interaktivní osnova na IS MU
 - průsvitky + videa + dotazy k probírané látce průběžně zveřejňovaný na webu předmětu
- **Sbírka cca 240 vzorových příkladů**
 - včetně řešení vybraných příkladů
 - poklad pro přípravu na zkoušku
- **Rozvrhování a plánování v jiných přednáškách:**
 - IV126 Umělá inteligence II
 - PA163 Omezující podmínky
 - IA158 Real Time Systems

- Michael Pinedo: [Planning and Scheduling in Manufacturing and Services](#), Springer, 2005.
- Philippe Baptiste, Claude Le Pape, Wim Nuijten: [Constraint-based scheduling : applying constraint programming to scheduling problems](#). Kluwer Academic Publishers, 2001.
- Michael Pinedo: [Scheduling Theory, Algorithms, and Systems](#) Springer, 2008 (2012).

- Michael Pinedo, Planning and Scheduling in Manufacturing and Services a další knihy <https://wp.nyu.edu/michaelpinedo/books/>
- Sigurdur Olafsson, Iowa State University, USA
<http://www.stern.nyu.edu/om/faculty/pinedo/book2/download.html>
- Erwin Hans, Johann Hurink, University of Twente, Nizozemí
<http://www.stern.nyu.edu/om/faculty/pinedo/book2/download.html>
- Roman Barták, MFF UK, CR
<http://kti.ms.mff.cuni.cz/~bartak/planovani/>

Úvod

- Příklady rozvrhování v průmyslu a ve službách
- Grahamova klasifikace rozvrhovacích problémů

Obecné řešící metody

- Přesné řešící metody
 - metoda větví a mezí
- Heuristiky
 - řídicí pravidla (*dispatching rules*)
 - paprskové prohledávání (*beam search*)
 - lokální prohledávání:
simulované žihání, tabu prohledávání, genetické algoritmy
- Matematické programování: formulace
 - lineární, celočíselné
- Programování s omezujícími podmínkami

- **Plánování projektu:** reprezentace projektu, kritická cesta, kompromis mezi časem a cenou, pracovní síla.
- **Plánování úloh:** řídicí pravidla, metoda větví a mezí & paprskové prohledávání, matematické prohledávání.
- **Rozvrhování montážních systémů:** montážní linka s flexibilním časem, s fixním časem.
- **Rezervace:** intervalové rozvrhování, rezervační systémy s rezervou.
- **Timetabling:** rozvrhování s operátory, rozvrhování s pracovní silou.
- **Rozvrhování zaměstnanců:** rozvrhování volných dnů, rozvrhování směn, cyklické rozvrhování směn.
- **Univerzitní rozvrhování:** teorie a praxe (rozvrhování na Masarykově univerzitě)

Úvod do rozvrhování

13. května 2021

- 1 Terminologie
- 2 Klasifikace rozvrhovacích problémů
- 3 Složitost
- 4 Reálné problémy

Definice pojmu rozvrhování

- Rozvrhování

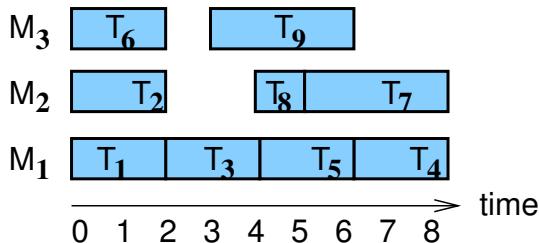
optimální alokace/přirazení zdrojů množině úloh v čase

- omezené množství zdrojů
- maximalizace zisku za daných omezení

- Stroj $M_i, i = 1, \dots, m$

úloha $T_j, j = 1, \dots, n$

Strojově orientovaný Ganttův diagram



Rozvrh:

- dán **umístěním úloh do konkrétního času a na konkrétní zdroje**, kde mají být úlohy prováděny

Úplný rozvrh:

- v rozvrhu jsou umístěny všechny úlohy ze zadání problému

Částečný rozvrh:

- některé úlohy ze zadání problému nejsou umístěny/přiřazeny

Konzistentní rozvrh:

- rozvrh, ve kterém jsou **splněna všechna omezení** kladená na zdroje a umístěné/přiřazené úlohy, např.
 - úloha je naplánována v čase, kdy je dostupná
 - na jednom stroji (s jednotkovou kapacitou) běží nejvýše jedna úloha

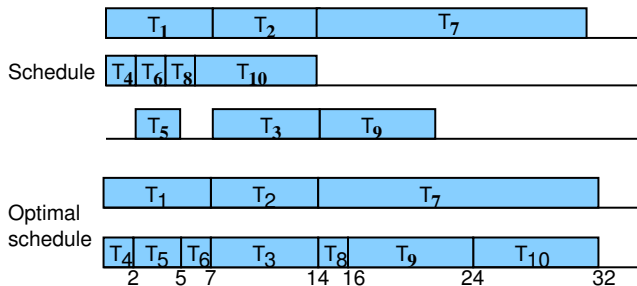
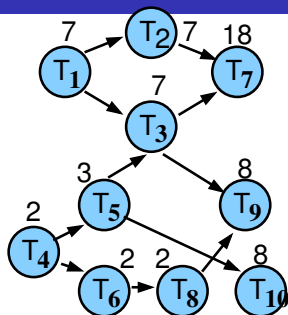
Konzistentní úplný rozvrh vs. konzistentní částečný rozvrh

Optimální rozvrh:

- umístění úloh na stroje je optimální vzhledem k zadanému optimalizačnímu kritériu, např.
 - $\min C_{max}$: makespan (čas dokončení poslední úlohy) je minimální

Příklad: montáž kola

- 10 úloh s danou dobou trvání
- Precedenční podmínky
 - úlohu lze provést až po provedení zadané množiny úloh
- Nepreemptivní úlohy
 - úlohy nelze přerušit
- Optimalizační kritéria
 - minimalizace makespan
 - minimální počet pracovníků



Scheduling ... rozvrhování/plánování

- alokace zdrojů za daných podmínek na objekty umístěných v časoprostoru tak, že je minimalizována celková cena daných zdrojů
- důraz je kladen **na uspořádání objektů**
 - precedenční podmínky
 - př. plánování výroby: stanovení pořadí operací, důležitost časových návazností operací
- *schedule* ... rozvrh
 - zahrnuje prostorové a časové informace

Timetabling ... rozvrhování

- alokace zdrojů za daných podmínek na objekty umístěných v časoprostoru tak, že jsou co nejlépe splněna zadaná kritéria
- důraz kladen **na konkrétní časové umístění objektů**
- často **vymezen předem časový horizont** (počet rozvrhovaných slotů)
 - př. školní rozvrhování: předmětům přiřazen čas a místo vyuuky
- *timetable* ... rozvrh
 - ukazuje, kdy a kde se budou události konat

Plánování (*planning*) někdy chápáno v dlouhodobějším horizontu

- krátkodobé podrobné rozvrhování + dlouhodobé obecné plánování
- např. plánování=vytvoření vhodné množiny úloh
 - tak aby bylo dosaženo zadaných cílůrozvrhování=přirazení úloh v čase na zdroje
 - tak aby byla minimalizována cena
- nebo dlouhodobé plánování zdrojů
 - tak abychom pokryli budoucí potřebyvs. krátkodobé rozvrhování úloh na zdroje
 - tak aby byly splněny aktuální požadavky

Plánování v umělé inteligenci (*AI planning*)

- vykonání posloupnosti akcí tak, abychom se dostali z počátečního stavu do koncového stavu
- př. plánování činností robota
 - počáteční stav v místnosti, cílový stav v místnosti, robot provede posloupnost akcí (např. přemístí předměty) tak, aby se dostal do cílového stavu
- lze chápat jako vytvoření vhodné množiny úloh jako u plánování (viz předchozí průsvitka)

Přednáška IV126 Umělá inteligence II

- zahrnut blok přednášek o plánování

Sequencing ... seřazení

- za daných podmínek:
konstrukce pořadí úloh, ve kterém budou prováděny
- *sequence ... posloupnost*
 - pořadí, ve kterém jsou úlohy prováděny
- př. pořadí automobilů na montážní linku

Rostering

- umístění zdrojů za daných podmínek do slotů s pomocí vzorů (*pattern*)
- *roster ... rozpis*
 - seznam jmen lidí, který určuje, které úlohy budou provádět a kdy
- př. rozpis sester v nemocnici, rozpis řidičů autobusů

- Stroje (zdroje, prostředky) $i = 1, \dots, m$
- Úlohy (aktivity) $j = 1, \dots, n$
- (i, j) operace nebo provádění úlohy j na stroji i
 - úloha se může skládat z několika operací
 - příklad: úloha 4 má tři operace s nenulovou dobou trvání $(2,4), (3,4), (6,4)$, tj. je prováděna na strojích 2,3,6
- Statické parametry úlohy
 - doba trvání p_{ij}, p_j : doba provádění úlohy j na stroji i
 - termín dostupnosti j (*release date*) r_j :
nejdřívější čas, ve kterém může být úloha j prováděna
 - termín dokončení (*due date*) d_j :
čas, do kdy by měla být úloha j nejpozději dokončena (preference)
vs. *deadline*: čas, do kdy musí být úloha j nejpozději dokončena (požadavek)
 - váha w_j : důležitost úlohy j relativně vzhledem k ostatním úlohám v systému
- Dynamické parametry úlohy
 - čas startu úlohy (*start time*) S_{ij}, S_j : čas zahájení provádění úlohy j na stroji i
 - čas konce úlohy (*completion time*) C_{ij}, C_j : čas, kdy je dokončeno provádění úlohy j na stroji i

Grahamova klasifikace $\alpha|\beta|\gamma$

používá se pro popis rozvrhovacích problémů

- α : charakteristiky stroje
 - popisuje způsob alokace úloh na stroje
- β : charakteristiky úloh
 - popisuje omezení aplikovaná na úlohy
- γ : optimalizační kritéria

<http://www.informatik.uni-osnabrueck.de/knust/class/>

- složitost pro jednotlivé rozvrhovací problémy

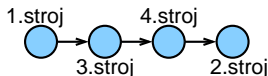
Příklady:

- $P3|prec|C_{\max}$: montáž kola
- $Pm|r_j|\sum w_j C_j$: paralelní stroje

- Jeden stroj 1: $1 | \dots | \dots$
- Identické paralelní stroje P_m
 - m identických strojů zapojených paralelně (se stejnou rychlostí)
 - úloha je dána jedinou operací
 - úloha může být prováděna na libovolném z m strojů
- Paralelní stroje s různou rychlostí Q_m
 - doba trvání úlohy j na stroji i přímo závislá na jeho rychlosti v_i
 - $p_{ij} = p_j / v_i$
 - př. několik počítačů s různou rychlostí procesoru
- Nezávislé paralelní stroje s různou rychlostí R_m
 - stroje mají různou rychlost pro různé úlohy
 - stroj i zpracovává úlohu j rychlostí v_{ij}
 - $p_{ij} = p_j / v_{ij}$
 - př. vektorový počítač počítá vektorové úlohy rychleji než klasické PC

- Multi-operační (*shop*) problémy

- jedna úloha je prováděna postupně na několika strojích
 - úloha j se skládá z několika operací (i, j)
 - operace (i, j) úlohy j je prováděna na stroji i po dobu p_{ij}
 - příklad: úloha j se 4 operacemi $(1, j), (2, j), (3, j), (4, j)$



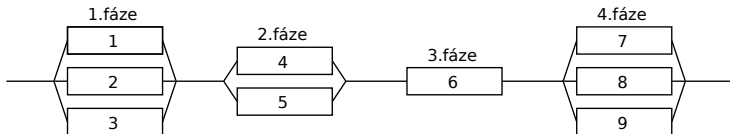
- Multi-operační problémy jsou klasické detailně studované problémy **operačního výzkumu**
- Reálné problémy ale často mnohem komplikovanější
 - využití znalostí o podproblémech nebo zjednodušených problémech a jejich řešících metodách

- *Flow shop Fm*

- multi-operační problém s m stroji v sérii
- každá úloha musí být prováděna na všech strojích
- úloha musí být prováděna na všech strojích ve stejném pořadí
 - nejdříve se úloha provádí na 1. stroji, pak na 2., ...

- *Flexible flow shop FFs*

- zobecnění *flow shop* problému
- s fází, každé fázi přísluší paralelní stroj
 - příklad: paralelní stroj 1.fáze: 1+2+3, paralelní stroj 2.fáze: 4+5, ...
- tj. multi-operační problém s s paralelními stroji
- úloha musí projít všemi fázemi ve stejném pořadí
 - nejprve se úloha provádí na paralelním stroji 1. fáze, pak na paralelním stroji 2. fáze, ...
- na paralelním stroji příslušejícím dané fázi může být úloha prováděna na libovolném stroji



- *Job shop Jm*

- multi-operační problém s m stroji
- pořadí provádění operací pro každou úlohu je předem určeno
 - doba zpracování úlohy na některých strojích může být nulová
- $(i, j) \rightarrow (k, j)$ určuje, že úloha j má být prováděna na stroji i dříve než na stroji k
příklad: $(2, j) \rightarrow (1, j) \rightarrow (3, j) \rightarrow (4, j)$

- *Open shop Om*

- multi-operační problém s m stroji
- doba zpracování úlohy na některých strojích může být nulová
- rozvrhovač určí, v jakém pořadí je úloha prováděna na strojích

- Precedenční podmínky

prec

- lineární posloupnost, stromová struktura
- pro úlohy a, b píšeme $a \rightarrow b$, což znamená $S_a + p_a \leq S_b$
- příklad: montáž kola

- Přerušování úlohy (*preemptions*)

pmtn

- při příchodu úlohy s vyšší prioritou je současná úloha přerušena

- Vhodnost stroje

 M_j

- podmnožina strojů M_j , na níž lze provádět úlohu j
- přiřazení místností: postačující velikost učebny
- hry: počítač s HW grafickou knihovnou

- Omezení na pracovní sílu

 W, W_l

- do problému zavedeme další typ zdroje
- stroje mohou potřebovat operátory a úlohy lze provádět jen tehdy, pokud jsou dostupní W operátorů
- mohou existovat různé skupiny operátorů se specifickou kvalifikací W_l je počet operátorů ve skupině l

- Směrovací (*routing*) omezení

- udávají, na kterých strojích musí být úloha prováděna
- pořadí provádění úlohy v multi-operačních problémech
 - job shop problém: pořadí operací předem stanoveno
 - open shop problém: pořadí operací úlohy (*route for the job*) stanoveno až při rozvrhování

- Nastavovací (*setup*) doba a cena

 $s_{ijk}, c_{ijk}, s_{jk}, c_{jk}$

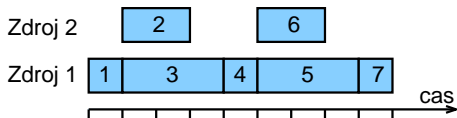
- závislé na posloupnosti provádění
- s_{ijk} čas nutný pro provádění úlohy k po úloze j na stroji i
- c_{ijk} cena nutná pro provádění úlohy k po úloze j na stroji i
- s_{jk}, c_{jk} čas/cena nezávislý na stroji
- příklady
 - plnění limonád do lahví
 - problém obchodního cestujícího $1|s_{jk}|C_{\max}$

- Výroba na objednávku a na sklad
 - výroba zboží na sklad, pokud je u něj záruka spotřeby nutno uvážit cenu za skladování
 - výroba zboží na objednávku vynucuje úvahu termínů dokončení vyprodukované množství závislé na zákazníkovi
- Skladovací prostor a doba čekání při výrobě
 - omezené množství prostoru při výrobě
 - horní hranice počtu úloh čekajících ve frontě na stroj
 - **blokování**: úloha je zablokována na současném stroji, protože fronta na následujícím stroji je plná
- ...

- **Makespan C_{\max}** : maximální čas konce úloh

$$C_{\max} = \max(C_1, \dots, C_n)$$

- Příklad: $C_{\max} = \max\{1, 3, 4, 5, 8, 7, 9\} = 9$



- Cíl: **minimalizace makespan** často
 - maximalizuje **výkon** (*throughput*)
 - zajišťuje **rovnoměrné zatížení strojů** (*load balancing*)
 - příklad: $C_{\max} = \max\{1, 2, 4, 5, 7, 4, 6\} = 7$

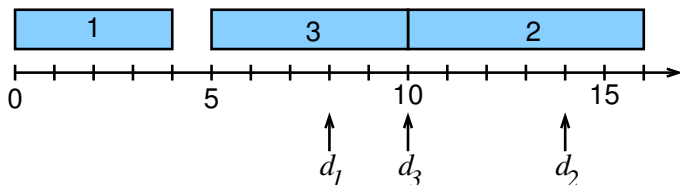


- Velmi často používané a základní kritérium

- Zpoždění (*lateness*) úlohy j : $L_j = C_j - d_j$
- Maximální zpoždění L_{\max}

$$L_{\max} = \max(L_1, \dots, L_n)$$

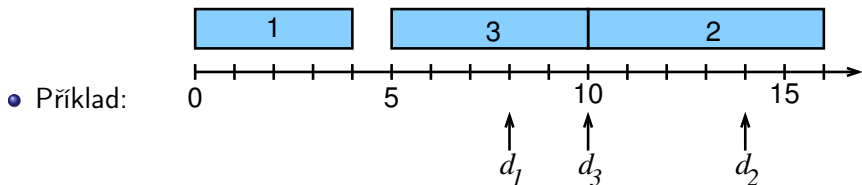
- Cíl: minimalizace maximálního zpoždění
- Příklad:



$$\begin{aligned}
 L_{\max} &= \max(L_1, L_2, L_3) = \\
 &= \max(C_1 - d_1, C_2 - d_2, C_3 - d_3) = \\
 &= \max(4 - 8, 16 - 14, 10 - 10) = \\
 &= \max(-4, 2, 0) = 2
 \end{aligned}$$

- Nezáporné zpoždění (*tardiness*) úlohy j : $T_j = \max(C_j - d_j, 0)$
- Cíl: minimalizace celkového zpoždění

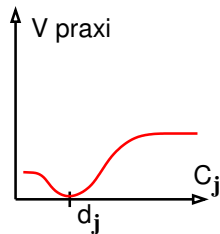
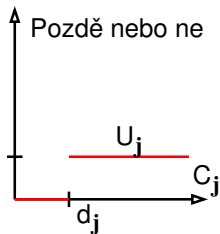
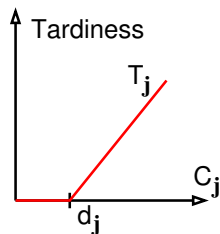
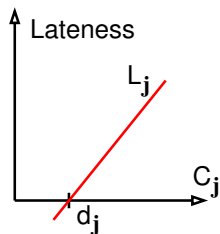
$$\sum_{j=1}^n T_j \quad \text{celkové zpoždění}$$



$$T_1 + T_2 + T_3 = \max(C_1 - d_1, 0) + \max(C_2 - d_2, 0) + \max(C_3 - d_3, 0) = \max(4 - 8, 0) + \max(16 - 14, 0) + \max(10 - 10, 0) = 0 + 2 + 0 = 2$$

- Cíl: minimalizace celkového váženého zpoždění

$$\sum_{j=1}^n w_j T_j \quad \text{celkové vážené zpoždění}$$



- Cena za skladování vyrobeného zboží
- Cena za skladování při výrobě
(*Work-In-Process inventory cost*)
 - příliš velké množství právě vyráběného zboží může zaplnit linku
 - příliš dlouho odložené zboží může být znehodnoceno
- Délka skladování při výrobě svázána s časy konce úloh
⇒ minimalizace součtu časů konců úloh

$$\sum_{j=1}^n C_j$$

⇒ minimalizace váženého součtu časů konců úloh

$$\sum_{j=1}^n w_j C_j$$

celková hodnota daná skladováním při výrobě

- Robustnost
 - robustnější rozvrh vyžaduje méně změn při změně problému (porucha stroje, dopravní špička)
- Cena za nastavení (*setup*)
 - cena za připravení letadla na odlet (čištění, zásobování, doplnění pohonných hmot)
- Cena za pracovní sílu
 - cena za přiřazení zaměstnanců na konkrétní směnu

V problému často řada optimalizačních kritérií

- multi-kritériální rozvrhování
 - *Pareto* optimalizace
- žádoucí vztah mezi nimi nemusí být jasně definovaný
 - co je důležitější?
- ani samotná kritéria nemusí být jasně definována
 - jak daný požadavek reprezentovat kritériem?

- Polynomiální problémy

- existuje algoritmus polynomiální složitosti pro řešení problému

- NP a NP-úplné problémy

- řešitelné nedeterministickým polynomiálním algoritmem
- potenciální řešení lze ověřit v polynomiálním čase
- v nejhorším případě exponenciální složitost (pokud neplatí $P=NP$)
- NP-úplný problém
 - libovolný problém v NP se na něj dá polynomiálně redukovat

- Příklady:

- Polynomiální

- $1||L_{\max} \quad P|pmtn|C_{\max} \quad 1||\sum w_j C_j$

- NP

- $1|r_j|L_{\max} \quad P2||C_{\max} \quad P2||\sum w_j C_j$

Reálný problém: rozvrhování sester v nemocnici

Jedná se o **problém rozvrhování zaměstnanců**

Požadavky na personál

- odlišný počet sester v pracovní dny a o víkendu
- menší nároky při obsazování nočních směn
- dodržení pravidel daných ze zákona
- preference zaměstnanců na pracovní dobu
- ...

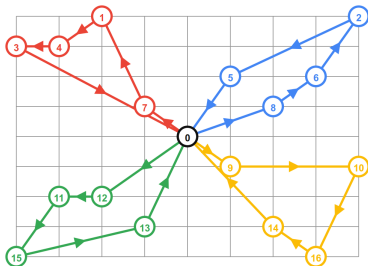
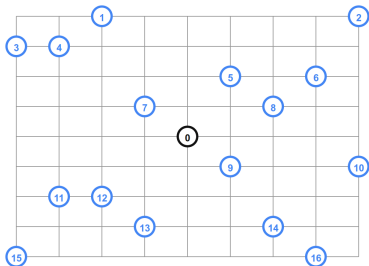
Cíl

- určit přiřazení sester na směny
- splnění požadavků
- minimalizace ceny

	+ -		1							2							3							4						
2000 December	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31		
	M	T	W	T	F	S	S	M	T	W	T	F	S	S	M	T	W	T	F	S	S	M	T	W	T	F	S	S		
A	DH	DH	DH	DH	DH	DH	DH	DH	DH	DH	DH	DH	DH	DH	DH	DH	DH	DH	DH	DH	DH	DH	DH	DH	DH	DH	DH	DH		
B																														
C																														
D																														
E																														
F																														
G																														
H																														

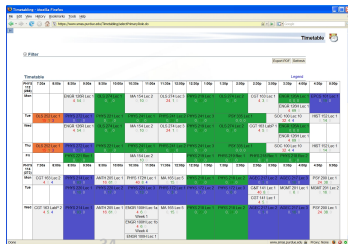
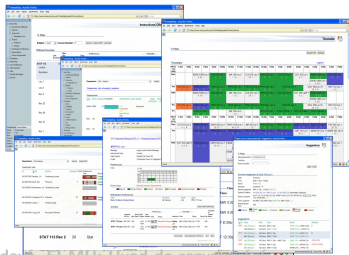
Plánování nákladní automobilové dopravy

- **Problém směřování vozidel (vehicle routing problem)**
 - požadavky na doručení/vyzvednutí/doručení+vyzvednutí
 - lokace, časová okna, hmotnost, objem
 - vozidla, která musí tyto lokace obsloužit
 - kapacita/objem vozidel, jedno/více depot vozidel
 - stejná/různá vozidla
 - optimalizace: počtu vozidel, vzdálenosti, ceny
- **Statický vs. dynamický problém**
 - problém dán předem vs. reakce na změny problému při realizaci řešení
- Spolupráce FI s firmou Wereldo



Z Google OR-Tools <https://developers.google.com/optimization/routing/vrp>

- Nalezení času a místnosti pro výuku předmětů na univerzitě
 - omezení kladena na umístění předmětů
 - optimalizace preferenčních požadavků na čas a místnosti
 - každý předmět má určeny své studenty (registrace, studijní obory)
 - minimalizace počtu překrývajících se předmětů pro všechny studenty
- Návrh, vývoj a používání systému UniTime
 - FI spolupracuje na návrhu a vývoji od 2001
 - primárně vyvinuto a používáno na Purdue University, USA
 - MU: používáno na 7 fakultách včetně FI
- International Timetabling Competition ITC 2019
 - reálné problémy z 10 různých univerzit po celém světě (UniTime data)



Řídící pravidla

13. května 2021

5 Řídící pravidla

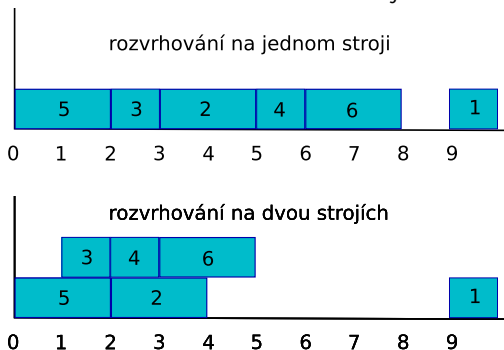
Řídící pravidla (*dispatching rules*)

Řídící pravidlo

- určuje pořadí (prioritu), ve kterém mají být úlohy prováděny
 - pokud má více úloh stejnou prioritu, úlohy jsou seřazeny náhodně (nebo např. dle čísla úlohy)
- jakmile se některý stroj uvolní, je vybrána nejprioritnější úloha

Příklad: použijte pro seřazení úloh **nejdřívější termín dostupnosti** r_j

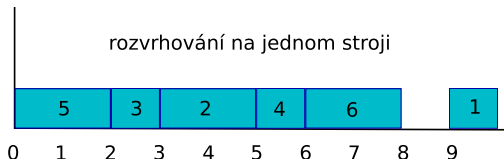
úlohy	1	2	3	4	5	6
r_j	9	2	1	2	0	3
p_j	1	2	1	1	2	2



Pravidla s termíny dostupnosti r_j a dokončení d_j

- Nejdřívejší termín dostupnosti (*Earliest Release Date first ERD*)
 - ekvivalentní nejdříve-přijde-nejdříve-obsloužen (*First-Come-First-Serve*)
 - minimalizuje **odlišnosti v době čekání na stroji**
- Nejdřívejší termín dokončení (*Earliest Due Date first EDD*)
 - směřuje k minimalizaci **maximálního zpoždění** mezi čekajícími úlohami
 - optimální pro $1||L_{max}$ (všechny úlohy dostupné na začátku)
 - pozor, i zde (zejména stejně jako **u všech pravidel**) **musíme brát v úvahu termín dostupnosti**, tj. úlohu lze plánovat teprve když je dostupná!!!
 - př. $r_2 = 3, d_2 = 5, r_3 = 0, d_3 = 6$ – dříve plánujeme úlohu 3

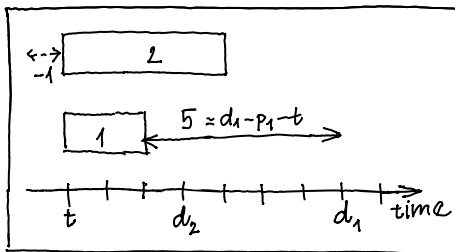
úlohy	1	2	3	4	5	6
r_j	9	3	0	2	0	6
p_j	1	2	1	1	2	2
d_j	10	5	6	9	2	8



Pravidla s termíny dostupnosti: minimální rezerva

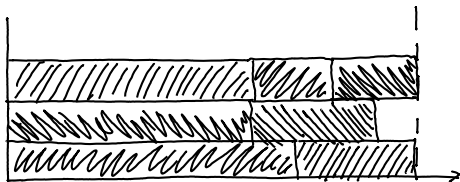
- Minimální rezerva (*Minimum Slack first MS*)

- $\max(d_j - p_j - t, 0)$
 - d_j termín dokončení
 - p_j doba provádění
 - t aktuální čas
- funkci \max používáme, abychom neměli záporné hodnoty pro úlohy, které už to určitě nestihnou
- minimalizace kritérií svázaných s termínem dokončení, tj. **maximální zpoždění**



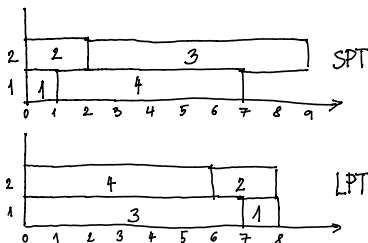
- **Statická pravidla** nejsou závislá na probíhajícím čase
 - pořadí se spočítá jako **funkce závislá na úloze a/nebo stroji**
 - pořadí nám definuje **prioritní frontu úloh**
 - př. nejdřívější termín dostupnosti
- **Dynamická pravidla** jsou závislá na čase
 - nutno **zahrnout do výpočtu funkce i aktuální čas**
 - uspořádání úloh závisí na čase \Rightarrow v každém čase je nutné určit znovu úlohu s nejvyšší prioritou a tu zpracováváme
 - př. minimální rezerva

- Nejdelší doba trvání (*Longest Processing Time first LPT*)
 - směřuje k rovnoměrnému zatížení paralelních strojů, tj. k minimalizaci **makespan**
 - myšlenka: kratší úlohy lze později využít pro vyrovnání zátěže na konci; jakmile jsou úlohy přiřazeny na stroje, tak je lze přeuspořádat bez změny zatížení



Pravidla s dobou trvání p_j

- Nejkratší doba trvání (*Shortest Processing Time first SPT*)
 - směřuje k **minimalizaci součtu časů konců úloh**, tj. **WIP** (Work In Process, cena za sklad při výrobě)



- Vážená nejkratší doba trvání (*Weighted Shortest Processing Time first WSPT*)
 - navíc w_j oproti SPT (řadím dle w_j/p_j)
 - **minimalizace vážených součtu časů konců úloh**, tj. **WIP**
 - optimální pro jeden stroj, kde jsou všechny úlohy dostupné na začátku ($r_j = 0$ pro každou úlohu j)

- Kritická cesta (*Critical Path CP*)
 - vhodné pro precedenční omezení
 - vybírá úlohu, která je první v nejdelším řetězci dob provádění v grafu úloh daném precedencemi
 - vede k minimalizaci **makespan**
- Nejméně flexibilní úloha (*Least Flexible Job LFJ first*)
 - při zadání množiny vhodných strojů
 - vybírá se úloha, která může být prováděna na nejmenším počtu strojů (tj. nejméně alternativ)
 - vede k minimalizaci **makespan**
- Náhodné pořadí (*Service in Random Order SIRO*)
 - náhodný výběr úloh

- Jednoduchá na implementaci
- Optimální ve speciálních případech
- Zaměřeny na jedno optimalizační kritérium
- Kombinování několika řídicích pravidel: **kompozitní řídicí pravidla**

- **Použití v praxi**
 - pro řadu problémů příliš triviální
 - i tady lze např. použít jako generátor iniciálního řešení
 - nebo jako metodu pro řešení podproblémů
 - používá se pro složité problémy s vysokými nároky na propustnost
 - např. počet naplánovaných aktivit za vteřinunebo pro problémy s vysokým stupněm dynamiky
 - např. plánování úloh na počítače
(neznámá doba trvání, příchody nových úloh, výpadky strojů)

Matematické programování

13. května 2021

6 Matematické programování

- Řada rozvrhovacích problémů může být formulována jako matematické programy
- Lineární programování, nelineární programování, celočíselné programování
- Předměty na FI
 - PV027 Optimalizace

- Lineární program (LP)

Minimalizace $c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$

za předpokladu

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2$$

...

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

$$x_j \geq 0 \text{ pro } j = 1, \dots, n$$

$$x_j \in \mathbb{R} \text{ pro } j = 1, \dots, n$$

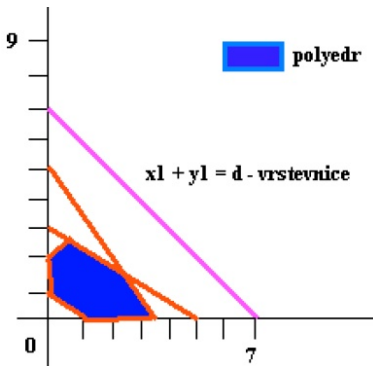
Lineární programování: příklad

- Výrobce vyrábí 3 výrobky A, B, C, na které spotřebuje materiál M a pracovní dobu P
- Maximalizujeme denní "Zisk" za předpokladu, že platí:
 - zisk z 1 kusu A = 500 Kč, spotřebujeme 4M a 2P.
 - zisk z 1 kusu B = 800 Kč, spotřebujeme 1M a 5P.
 - zisk z 1 kusu C = 300 Kč, spotřebujeme 2M a 1P.
 - přitom platí denní omezení materiálu $M \leq 30$ kusů a pracovních hodin $P \leq 48$ hodin (např. 6 lidí pracujících 8 hodin denně)
- Jak lze použít obecný LP vzorec?
 - $\max(\text{Zisk}) = 500 \cdot A + 800 \cdot B + 300 \cdot C$ ($c_1 = 500, x_1 = A, \dots$)
 - $4 \cdot A + 1 \cdot B + 2 \cdot C \leq 30$ (omezení materiálu)
 - $2 \cdot A + 5 \cdot B + 1 \cdot C \leq 48$ (omezení prac. hodin)
- Jak bude vypadat výsledek? V jakých proměnných budeme mít uloženou odpověď na naši otázku? Co budou vyjadřovat?
- Bude to použitelné v praxi?
- Max vs. min není problém, neboť platí:
 $\max f(x) = -\min(-f(x))$ pro $x \in \mathbb{R}^n$

Lineární programování: metody řešení

- Pro malé 2D, 3D problémy si často vystačíme s grafickým řešením
 - cíl je rovnice s parametrem = vrstevnice v ploše
 - omezení jsou poloroviny
 - oblast řešení je průnik polorovin (polyedr, tj. mnohostrán)
 - řešení je průnik rovnice s parametrem a vzniklého polyedru

- Simplexová metoda
 - efektivní nalezení řešení
 - většinou polynomiální čas
 - použití v praxi pro řešení rozsáhlých problémů
- Elipsoidová metoda
- Metoda vnitřních bodů



- Celočíselné programování (integer programming IP)
 - lineární programování + všechny **proměnné celočíselné**
- Mixed-integer programming (MIP)
 - použity celočíselné i reálné obory hodnot proměnných
- Mnohem obtížnější než lineární programování
- Pro rozvrhování mnohem užitečnější

- Pracuje se s LP relaxací celočíselného programu, tj. z celočíselného programu jsou odstraněna omezení požadující řešení z oboru celých čísel
- Metoda řezné roviny (cutting plane)
 - generována přídavná lineární omezení (řezné roviny), která musí být splněna v celočíselném řešení
 - přídavná omezení zužují množinu přípustných řešení při zachování celočíselných řešení
 - řešení LP relaxace celočíselného programu s přídavnými omezeními
 - pokud nenalezeno řešení celočíselné, přidáváme další řezné roviny a opakujeme postup
- Metoda větví a mezí (branch and bound)
 - větvení na rozhodovacích proměnných ($x_j = r$ v LP řešení pak přidáme $x_j \leq \lfloor r \rfloor$, $x_j \geq \lceil r \rceil$)
 - relaxované lineární programy poskytují hranice (meze)
- Hybridní metody
 - kombinace různých metod
 - např. kombinace metody větví a mezí a řezných rovin (branch and cut)

Příklad: 1 | $\sum_{j=1}^n w_j C_j$

- Proměnné $x_{jt} = 1$ jestliže úloha j začne v čase t
 $= 0$ jinak
- Formulace celočíselného programu

Minimalizace

$$\sum_{j=1}^n \sum_{t=0}^{C_{max}-1} w_j(t + p_j)x_{jt} \qquad \text{tj. } \sum_{j=1}^n w_j C_j$$

za předpokladu

$$x_{jt} \in \{0, 1\} \quad \forall j, t$$

každá úloha právě jednou začne:

$$\sum_{t=0}^{C_{max}-1} x_{jt} = 1 \quad \forall j$$

v každém čase běží právě jedna úloha:

$$\sum_{j=1}^n \sum_{s=\max(t-p_j, 0)}^{t-1} x_{js} = 1 \quad \forall t$$

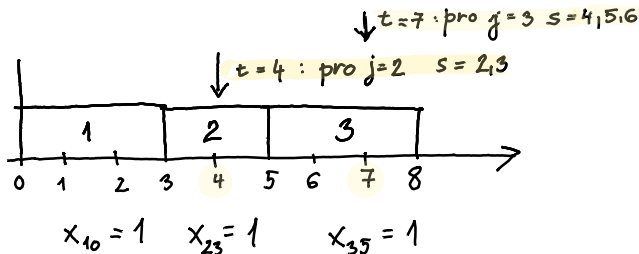
(pro každé t běží v intervalu $\langle t-1, t \rangle$ právě jedna úloha)

Příklad: 1 | $\sum_{j=1}^n w_j C_j$, v každém čase jedna úloha

- Proměnné $x_{jt} = 1$ jestliže úloha j začne v čase t

V každém čase běží právě jedna úloha:

$$\sum_{j=1}^n \sum_{s=\max(t-p_j, 0)}^{t-1} x_{js} = 1 \quad \forall t$$



Lokální prohledávání

13. května 2021

- 7 Lokální prohledávání obecně
- 8 Tabu prohledávání
- 9 Simulované žíhání
- 10 Genetické algoritmy

Konstruktivní metody

- začneme s prázdným rozvrhem
- do rozvrhu přidáváme postupně jednotlivé úlohy tak, aby byl rozvrh stále konzistentní

Lokální prohledávání

- začneme s úplným nekonzistentním rozvrhem
 - triviálně: s náhodně vygenerovaným
- snažíme se najít lepší „podobný“ rozvrh lokálními změnami
- kvalitu rozvrhu posuzujeme optimalizačními kritérii
 - např. makespan
- optimalizační kritéria vyhodnocují také konzistenci rozvrhu
 - např. počet porušených precedenčních omezení

Hybridní přístupy

- kombinace obou metod

1 Inicializace

- $k = 0$
- výběr iniciačního rozvrhu S_0
- zaznamenání dosud nejlepšího rozvrhu:

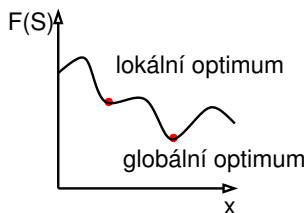
$$S_{best} = S_0 \text{ a } best_cost = F(S_0)$$

2 Výběr a aktualizace

- **výběr rozvrhu z okolí:** $S_{k+1} \in N(S_k)$
- pokud **kriterium přijetí rozvrhu** nesplňuje žádný prvek $N(S_k)$, pak algoritmus končí
- jestliže $F(S_{k+1}) < best_cost$ pak
 $S_{best} = S_{k+1}$ a $best_cost = F(S_{k+1})$

3 Ukončení

- jestliže platí podmínky ukončení pak algoritmus končí
- jinak $k = k + 1$ a skok na krok 2.



Reprezentace rozvrhu

- permutace n úloh
- příklad se šesti úlohami: 1,4,2,6,3,5

Definice okolí

- **párová výměna sousedních úloh**
 - příklad: 1,4,2,6,3,5 se změní např. na 1,4,2,6,5,3
 - možných rozvrhů v okolí: $n - 1$
- **nebo výběr libovolné úlohy v rozvrhu a umístění na libovolnou pozici**
 - příklad: z 1,4,2,6,3,5 náhodně vybereme 4 a dáme ji jinam: 1,2,6,3,4,5
 - možných rozvrhů v okolí: $\leq n(n - 1)$

Iniciální řešení generujeme

- náhodně
- heuristicky např. konstruktivním algoritmem jako jsou řídicí pravidla

Podmínka ukončení typicky

- zadaný počet iterací
- omezená doba běhu
- počet porovnání účelové funkce
- žádné zlepšení nezískáno po daném počtu iterací

- Lokální změna
 - úprava rozvrhu výběrem rozvrhu z okolí
- Výběr rozvrhu z okolí, tj. prohledání okolí a výběr vhodného kandidáta
 - náhodný výběr
 - výběr nejslibnějšího kandidáta
 - vybíráme rozvrh s nejlepší hodnotou účelové funkce v okolí
 - snaha o zlepšení hodnoty účelové funkce

Kritérium výběru rozvrhu =

kritérium přijetí/odmítnutí rozvrhu

- akceptovat vždy lepší rozvrh?
- někdy akceptovat i horší rozvrh?

Metody akceptování horšího rozvrhu

- pravděpodobnostní
 - náhodná procházka: s malou pravděpodobností (např. 0.01) akceptujeme i horší rozvrh
 - simulované žihání
- deterministická
 - tabu prohledávání: udržujeme tabu seznam několika posledních stavů/změn, které jsou pro další výběr nepřipustné

Deterministické kritérium přijetí/odmítnutí rozvrhu

Udržován **tabu seznam** několika posledních změn v rozvrhu

- **tabu seznam = seznam zakázaných změn**
- každá nová změna je umístěna na vrchol tabu seznamu
 - př. uchovávané změny: výměna úloh j a k
- okolí omezeno na rozvrhy, které nepožadují změnu z tabu seznamu
 - zabraňuje cyklení
 - příklad triviálního cyklení:
první krok: prohození úloh 3 a 4, druhý krok: prohození úloh 4 a 3
- pevná délka seznamu (typicky: 5-9)
 - nejstarší změny z tabu seznamu odstraněny
 - příliš malá délka nebezpečí cyklení
 - příliš velká délka: může omezit prohledávání příliš

Aspirační kritérium

- určuje, kdy je možné akceptovat i změny v tabu seznamu
- př. změna z tabu seznamu povolena, pokud zlepšeno $F(S_{best})$

Algoritmus tabu prohledávání

- ①
 - $k = 1$
 - výběr iniciálního rozvrhu S_1 použitím heuristiky,
 $S_{best} = S_1$
- ②
 - výběr $S_c \in N(S_k)$
 - jestliže je změna $S_k \rightarrow S_c$ zakázána
protože je v tabu seznamu
a není splněno aspirační kritérium
pak běž na krok 2
- ③
 - jestliže změna $S_k \rightarrow S_c$ není zakázána tabu seznamem
nebo je splněno aspirační kritérium
pak $S_{k+1} = S_c$
ulož reversní změnu na vrchol tabu seznamu
posuň další pozice v tabu seznamu o pozici níže
smaž poslední položku z tabu seznamu
 - jestliže $F(S_c) < F(S_{best})$ pak $S_{best} = S_c$
- ④
 - $k = k + 1$
 - jestliže platí podmínka ukončení pak konec
jinak běž na krok 2.

Příklad: tabu seznam

- Uvažujte rozvrhovací problém s $1 \parallel \sum w_j T_j$
 - opakování: $T_j = \max(C_j - d_j, 0)$

úlohy	1	2	3	4
p_j	10	10	13	4
d_j	4	2	1	12
w_j	14	12	1	12

- Okolí:** všechny rozvrhy získané párovou výměnou sousedních úloh
- Výběr rozvrhu z okolí:** vybereme nejlepší rozvrh
- Tabu seznam:** páry úloh (j, k) , které byly přehozeny při posledních dvou změnách

$$S_1 = (2, 1, 4, 3)$$

$$F(S_1) = \sum w_j T_j = 12 \cdot 8 + 14 \cdot 16 + 12 \cdot 12 + 1 \cdot 36 = 500 = F(S_{best})$$

$$F(1, 2, 4, 3) = 480$$

$$F(2, \underline{4}, \underline{1}, 3) = 436 = F(S_{best})$$

$$F(2, 1, 3, 4) = 652$$

$$\text{Tabu seznam: } \langle (1, 4) \rangle$$

Příklad: tabu seznam (pokračování)

$$S_2 = (2, 4, 1, 3), F(S_2) = 436$$

$$F(\underline{4}, \underline{2}, 1, 3) = 460$$

$$F(2, 1, 4, 3) (= 500) \quad \text{tabu!}$$

$$F(2, 4, 3, 1) = 608$$

Tabu seznam: $\langle (2, 4), (1, 4) \rangle$

$$S_3 = (4, 2, 1, 3), F(S_3) = 460$$

$$F(2, 4, 1, 3) (= 436) \quad \text{tabu!}$$

$$F(4, \underline{1}, \underline{2}, 3) = 440$$

$$F(4, 2, 3, 1) = 632$$

Tabu seznam: $\langle (2, 1), (2, 4) \rangle$

$$S_4 = (4, 1, 2, 3), F(S_4) = 440$$

$$F(\underline{1}, \underline{4}, 2, 3) = 408 = F(S_{best})$$

$$F(4, 2, 1, 3) (= 460) \quad \text{tabu!}$$

$$F(4, 1, 3, 2) = 586$$

Tabu seznam: $\langle (4, 1), (2, 1) \rangle$

$$F(S_{best}) = 408$$

- Uvažujte rozvrhovací problém s $1 \parallel \sum w_j T_j$

úlohy	1	2	3	4
p_j	10	10	13	4
d_j	4	2	1	12
w_j	14	12	1	12

- Aplikujte tabu prohledávání pro iniciální řešení (2, 1, 4, 3)
- Okolí: všechny rozvrhy získané párovou výměnou sousedních úloh
- Výběr rozvrhu z okolí: vybereme nejlepší rozvrh
- Proved'te čtyři iterace
- Tabu seznam: páry úloh (j, k) , které byly přehozeny při
 - jedné poslední změně výsledek: $F(S_{best}) = 408$
 - třech posledních změnách výsledek: $F(S_{best}) = 436$

- Myšlenka: **simulace procesu ochlazování kovů**
 - na začátku při vyšší teplotě atomy více kmitají a pravděpodobnost změny krystalické mřížky je vyšší
 - postupným ochlazováním se atomy usazují do „nejlepší polohy“ s nejmenší energií a pravděpodobnost změny je menší
 - ⇒ na začátku je tedy pravděpodobnost toho, že akceptujeme zhoršování řešení, vyšší
- Aplikace u lokálního prohledávání
 - lepší nebo stejné řešení akceptováno
 - algoritmus umožňuje akceptovat horší řešení, abychom unikli z lokálního minima
 - pravděpodobnost přijetí horšího řešení se postupně snižuje

- **Parametr chlazení t**

- t je iniciálně vysoké: hodně změn je akceptováno
- t postupně klesá: horší změny jsou skoro vždy odmítnuty

- Rozdíl mezi kvalitou nového a existujícího řešení

- $\Delta c = F(S_{new}) - F(S_{old})$

- **Metropolisovo kritérium**

- předpoklad: minimalizace F
- lepší nebo stejné řešení akceptováno: $\Delta c \leq 0$, tj. $F(S_{new}) \leq F(S_{old})$
- pravděpodobnostní přijetí/odmítnutí rozvrhu:
horší řešení ($\Delta c > 0$) akceptováno pokud

$$U < e^{-\Delta c/t}$$

- U náhodné číslo z intervalu $(0, 1)$

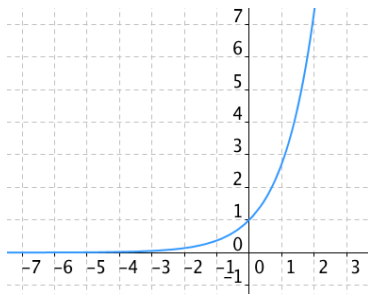
Metropolisovo kritérium

Horší řešení ($F(S_{new}) - F(S_{old}) = \Delta c > 0$) akceptováno pokud

$$U < e^{-\Delta c/t}$$

- U náhodné číslo z intervalu $(0, 1)$
- $\Delta c > 0$, tj. $-\Delta c < 0$
- pokud klesá t nebo klesá $-\Delta c$, tak klesá i $e^{-\Delta c/t}$
- pomůcka: porovnej $e^{-10/100}$ vs. $e^{-100/100}$ a $e^{-10/100}$ vs. $e^{-10/1}$

Graf e^x



Algoritmus simulovaného žíhání

- 1
 - $k = 1$
 - výběr iniciálního rozvrhu S_1 použitím heuristiky, $S_{best} = S_1$
 - nastavení iniciální teploty $t_0 > 0$
 - výběr funkce redukce teploty $\alpha(t)$
- 2
 - výběr $S_{new} \in N(S_k)$
 - jestliže $F(S_{new}) < F(S_{best})$ pak $S_{best} = S_{new}$, $S_{k+1} = S_{new}$
jinak
 - jestliže $F(S_{new}) \leq F(S_k)$ pak $S_{k+1} = S_{new}$
jinak
 - generuj náhodné číslo U_k
 - jestliže $U_k < e^{\frac{F(S_k) - F(S_{new})}{t}}$ pak $S_{k+1} = S_{new}$
jinak $S_{k+1} = S_k$
- 3
 - $t_k = \alpha(t_k)$
 - $k = k + 1$
 - jestliže platí podmínka ukončení pak konec
jinak běž na krok 2.

Příklad: simulované žihání

- Opakování: $T_j = \max(C_j - d_j, 0)$
- Uvažujte rozvrhovací problém s $1 \parallel \sum w_j T_j$

úlohy	1	2	3	4
p_j	9	9	12	3
d_j	10	8	5	28
w_j	14	12	1	12

- Použijte simulované žihání s iniciálním rozvrhem (3, 1, 4, 2)
- Okolí: všechny rozvrhy, které dostaneme sousedními párovými výměnami
- Výběr rozvrhu z okolí náhodně
- Zvolte $\alpha(t) = 0.9 \times t$
- $t_0 = 0.9$
- Použijte následující náhodná čísla: 0.17, 0.91, ...

Příklad: simulované žihání (řešení)

$$S_{best} = S_1 = (3, 1, 4, 2)$$

$$F(S_1) = \sum w_j T_j = 1 \cdot 7 + 14 \cdot 11 + 12 \cdot 0 + 12 \cdot 25 = 461 = F(S_{best})$$

$$t_0 = 0.9$$

$$S_{new} = (1, 3, 4, 2)$$

$$F(S_{new}) = 316 < F(S_{best})$$

$$S_{best} = (1, 3, 4, 2)$$

$$F(S_{best}) = 316$$

$$S_2 = (1, 3, 4, 2)$$

$$t = 0.9 \times 0.9 = 0.81$$

$$S_{new} = (1, 3, 2, 4)$$

$$F(S_{new}) = 340 > F(S_{best}) = 316$$

$$F(S_{new}) > F(S_2) = 316$$

$$U_1 = 0.17 > e^{-(340-316)/0.81} = 1.35 \times 10^{-13}$$

$$S_3 = S_2 = (1, 3, 4, 2)$$

$$t = 0.729$$

$$S_{new} = (1, 4, 3, 2)$$

$$F(S_{new}) = 319 > F(S_{best}) = 316$$

$$F(S_{new}) > F(S_3) = 316$$

$$U_3 = 0.91 > e^{-(319-316)/0.729} = 0.016$$

$$S_4 = S_3 = (1, 3, 4, 2)$$

$$t = 0.6561$$

...

- Iniciální teplota
 - musí být „vysoká”
 - kritérium přijetí rozvrhu: 40%–60% vykazuje dobré výsledky v mnoha situacích
- Parametr chlazení
 - několik změn při dané teplotě
 - jedna změna při každé teplotě

$$t = \alpha \times t$$

$$t = \frac{t}{1+\beta t}$$

α typicky v intervalu [0.9,0.99]

β typicky blízké k 0

Srovnání

- simulované žihání, tabu prohledávání
 - jedno řešení je přenášeno z jedné iterace do druhé
- genetické algoritmy
 - udržována populace (několika přenášených) řešení

Genetické algoritmy

- rozvrhy jsou **jednotlivci (chromozomy)**, kteří tvoří **populaci**
- rozhodovací proměnná (např. čas jedné úlohy) je **gen**
- hodnota rozhodovací proměnné (např. konkrétní čas) je **alela**
- každý jednotlivec je vyhodnocen kritériem **vhodnosti (fitness)**
- někteří jednotlivci **mutují**
- jednotlivci jsou vybráni k reprodukci **křížením** a mají děti tvořící následující generaci
- nejvhodnější jedinci přežijí do další generace

- **Křížení (*crossover*)**: kombinování posloupnosti operací na jednom stroji v jednom rodičovském rozvrhu s posloupností operací na jiném stroji u jiného rodiče
- Operátor jednoduchého křížení **není** užitečný!

bod řezu

$$\begin{array}{l} P1=[2 \ 1 \ 3 \ | \ 4 \ 5 \ 6 \ 7] \\ P2=[4 \ 3 \ 1 \ | \ 2 \ 5 \ 7 \ 6] \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} O1=[\underline{2} \ 1 \ 3 \ \underline{2} \ 5 \ 7 \ 6] \\ O2=[\underline{4} \ 3 \ 1 \ \underline{4} \ 5 \ 6 \ 7] \end{array}$$

- **Částečné mapované křížení**

bod rezu 1 bod rezu 2

$$\begin{array}{l} P1=[1 \ 6 \ | \ \boxed{3 \ 4 \ 5} \ | \ 2] \\ P2=[4 \ 3 \ | \ \boxed{1 \ 2 \ 6} \ | \ 5] \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} O1=[3 \ 5 \ 1 \ 2 \ 6 \ 4] \\ O2=[2 \ 1 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6] \end{array}$$

Konstrukce O1: 126 dám místo 345, 3 dám tam, kde byla 1;
4 dám tam, kde byla 2; 5 dám tam, kde byla 6

Máme nějaký problém? Jak křížit $P1=[12|465|3]$ $P2=[34|216|5]$?

PMX částečné mapované křížení: příklad

- Rodič 1: 8 4 7 3 6 2 5 1 9 0
Rodič 2: 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
Potomek 1: 3 6 2 5 1
- Rodič 1: 8 4 7 3 6 2 5 1 9 0
Rodič 2: 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
Potomek 1: 3 6 2 5 1
- Rodič 1: 8 4 7 3 6 2 5 1 9 0
Rodič 2: 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
Potomek 1: 3 6 2 5 1
- Rodič 1: 8 4 7 3 6 2 5 1 9 0
Rodič 2: 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
Potomek 1: 4 3 6 2 5 1
- Rodič 1: 8 4 7 3 6 2 5 1 9 0
Rodič 2: 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
Potomek 1: 7 4 3 6 2 5 1
- Rodič 1: 8 4 7 3 6 2 5 1 9 0
Rodič 2: 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
Potomek 1: 0 7 4 3 6 2 5 1 8 9

kopírujeme náhodný pás alel
z rodiče 1 potomkovi

4 je první hodnotou v pásu rodiče 2,
která není v potomkovi, nalezneme 6
6 stále v pásu => pokračujeme s 6
6 odpovídá 5, 5 stále v pásu
pokračujeme s 5

5 odpovídá 2, 2 není v pásu
na pozici 2 dáme 4 (z 2.)

7 je další hodnota v pásu rodiče 2,
která není v potomkovi, nalezneme 1
1 není v pásu, na pozici 1 dáme 7
na zbývající pozice potomka
dáme alely z rodiče 2

PMX částečné mapované křížení: algoritmus

- 1 Náhodně vybereme pás alel z rodiče 1 a okopírujeme ho do potomka
- 2 V segmentu odpovídajících pozic rodiče 2 vybereme postupně hodnoty, které **ještě nebyly zkopírovány** do potomka

Pro každou z těchto hodnot A:

- 1 Zapamatujeme si index této hodnoty v rodiči 2. Nalezneme hodnotu V z rodiče 1 na stejné pozici.
 - 2 Nalezneme V u rodiče 2.
 - 3 Pokud patří index hodnoty V v rodiči 2 mezi indexy určující původní pás, pokračujeme krokem 2.1 s použitím této hodnoty.
 - 4 Pokud index hodnoty V není částí původního pásu, přidáme hodnotu A do potomka na této pozici.
- 3 Zkopírujeme zbývající pozice z rodiče 2 do potomka

2. Rodič 1:	8 4 7 <u>3 6 2 5 1</u> 9 0	4 je první hodnotou v pásu rodiče 2,
Rodič 2:	0 1 2 3 <u>4 5 6 7</u> 8 9	která není v potomkovi, nalezneme 6
Potomek 1:	___ <u>3 6 2 5 1</u> ___	6 stále v pásu => pokračujeme s 6

Cvičení: určete potomky pro [12|465|3] a [34|216|5] ... řešení: 324651,542163

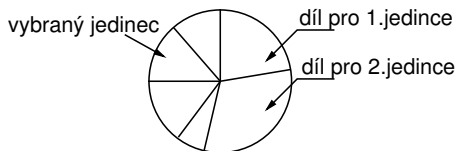
- **Mutace** umožňuje genetickému algoritmu prohledávat prostor nedosažitelný operátorem křížení
- **Párová výměna sousedů** v posloupnosti

$$[1, 2, \dots, n] \rightarrow [2, 1, \dots, n]$$

- **Mutace výměnou**: změna dvou náhodně vybraných prvků permutace
- **Mutace posunem**: přesun náhodně vybraného prvku o náhodný počet míst doleva nebo doprava
- **Mutace promícháním podseznamu**: výběr dvou bodů v řetězci náhodně a náhodná permutace prvků mezi těmito dvěma pozicemi

• Ruletové kolo

- šance na reprodukci jsou **proporcionálně** závislé na vhodnosti jedince
- velikost každého dílu ruletového kola záleží na vhodnosti konkrétního jedince
- př. kritérium vhodnosti pro 6 jedinců: 5,7,1,3,3,3
první díl má velikost 5, druhý 7, třetí 1, čtvrtý 3, pátý 3, šestý 3



• Kroky pro ruletové kolo

- 1 sečti vhodnost všech jednotlivců generace: TF
 - př. $TF = 5 + 7 + 1 + 3 + 3 + 3 = 22$
- 2 generuj náhodné číslo m mezi 0 a 22
- 3 vrať prvního jednotlivce generace do jehož dílu spadá m
 - čím větší vhodnost jedince, tím větší pravděpodobnost, že se na něj strefíme

Turnajový výběr

- 1 výběr jednoho jedince
 - náhodně vyber skupinu t jedinců z populace
 - vyber nejlepšího jedince
- 2 pokud potřebujeme vybrat k jedinců, pak postup opakujeme k -krát

Jak garantovat, že nejlepší člen/členové generace přežijí?

Elitářský model:

- nejlepší člen generace je vybrán jako člen následující generace
nebo
- nejlepší potomci a rodiče jsou vybíráni do následující generace

Implementace genetického algoritmu

- 1
 - $k = 1$
 - vyber N iniciálních rozvrhů $S_{1,1}, \dots, S_{1,N}$ použitím heuristiky
 - vyhodnoť jednotlivce generace
- 2
 - vytvoř nové jednotlivce spojením jednotlivců současné generace pomocí křížení a mutace
 - smaž členy existující generace, aby udělali místo novým jednotlivcům
 - vyhodnoť nové jednotlivce a přidej je do populace $S_{k+1,1}, \dots, S_{k+1,N}$
- 3
 - $k = k + 1$
 - jestliže platí podmínka ukončení pak vrať nejlepšího jedince jako řešení a skonči jinak běž na krok 2.

Příklad: genetické algoritmy

- Uvažujte rozvrhovací problém s $1 \mid \mid \sum T_j$

úlohy	1	2	3	4	5
p_j	4	3	7	2	2
d_j	5	6	8	8	17

- Velikost populace: 3
- Výběr
 - v každé populaci se reprodukuje nejvhodnější jedinec
 - pro reprodukci je použita párová výměna sousedů vybraných náhodně
 - počet možných potomků: 4
každý vybrán s pravděpodobností $1/4$
 - potomci se mohou reprodukovat jako ostatní jednotlivci populace
- Iniciální populace: náhodné posloupnosti permutací

Příklad: genetické algoritmy (řešení)

Generace 1	Jedinec	25314	14352	12345
	Cena	25	17	16

Vybraný jedinec: 12345 s potomkem 13245, cena 20

Generace 2	Jedinec	13245	14352	12345
	Cena	20	17	16

Vybraný jedinec: 12345 s potomkem 12354, cena 17

Generace 3	Jedinec	12354	14352	12345
	Cena	17	17	16

Vybraný jedinec: 12345 s potomkem 12435, cena 11

Generace 4	Jedinec	14352	12345	12435
	Cena	17	16	11

Vybraný jedinec: 12435 – optimální řešení

Nevýhoda takto jednoduchého nastavení algoritmu:
výběr nejlepšího jedince způsobuje opakovanou reprodukci nejlepšího jedince,
dokud není nahrazen lepším potomkem

- Velikost populace
 - malá populace riskuje příliš malé pokrytí prohledávacího prostoru
 - velká populace má velké výpočetní nároky
 - dle empirických výsledků
 - velikost populace kolem 30 často adekvátní
 - velikost populace 20-100 je běžná
- Mutace:
obvykle použita s velmi malou pravděpodobností

Omezující podmínky

13. května 2021

- 11 Problém splňování podmínek
- 12 Rozvrhování jako problém splňování podmínek
- 13 Podmínky pro zdroje
- 14 Globální omezení
- 15 Rozvrhovací strategie

Omezení (*constraint*)

- Dána

- množina (doménových) proměnných $Y = \{y_1, \dots, y_k\}$
- konečná množina hodnot (doména) $D = D_1 \cup \dots \cup D_k$

Omezení c na Y je podmnožina $D_1 \times \dots \times D_k$

- omezuje hodnoty, kterých mohou proměnné nabývat současně

- Příklad:

- proměnné: A, B
- domény: $\{0,1\}$ pro A $\{1,2\}$ pro B
- omezení: $A \neq B$ nebo $(A,B) \in \{(0,1), (0,2), (1,2)\}$

- Omezení c definováno na y_1, \dots, y_k je **splněno**,

pokud pro $d_1 \in D_1, \dots, d_k \in D_k$ platí $(d_1, \dots, d_k) \in c$

- příklad (pokračování): omezení splněno pro $(0,1), (0,2), (1,2)$, není splněno pro $(1,1)$

Problém splňování podmínek (CSP)

Dána

- konečná množina **proměnných** $V = \{v_1, \dots, v_n\}$
- konečná množina hodnot (**doména**) $D = D_1 \cup \dots \cup D_n$
- konečná množina **omezení** $C = \{c_1, \dots, c_m\}$
 - omezení je definováno na podmnožině V

Problém splňování podmínek je trojice (V, D, C)
(*constraint satisfaction problem CSP*)

Příklad:

- proměnné: A, B, C
- domény: $\{0,1\}$ pro A $\{1\}$ pro B $\{0,1,2\}$ pro C
- omezení: $A \neq B, B \neq C$

Řešení CSP

- přiřazení hodnot všem proměnným, které splňuje všechna omezení
- $(d_1, \dots, d_n) \in D_1 \times \dots \times D_n$ je **řešení** (V, D, C)
 - pro každé $c_i \in C$ na v_{i_1}, \dots, v_{i_k} platí $(d_{i_1}, \dots, d_{i_k}) \in c_i$

- Příklad:
 - $D_a = \{1, 2\}, D_b = \{1, 2, 3\}$
 - $a < b$

⇒ hodnota 1 může být z D_b bezpečně vyřazena
- Podmínky se používají **aktivně pro odstranění nekonzistencí** z problému
 - nekonzistence = hodnota, která nemůže být součástí žádného řešení (nesplňuje nějakou podmínku)
- Tato tzv. **filtrace domén** je realizována procedurou REVISE, kterou má každá podmínka

Hranová konzistence (*arc consistency AC*)

- Říkáme, že podmínka je **hranově konzistentní**, pokud pro každou hodnotu každé její proměnné existuje kombinace hodnot pro další proměnné v podmínce tak, že je podmínka splněna
Říkáme, že **hodnota je podporována/má podporu**.
- REVISE procedura pro hranovou konzistenci odstraní z domén proměnných všechny hodnoty, které nemají podporu
- Příklad: $A=B+C$ je hranově konzistentní pro $B, C \in \{1,2\}$, $A \in \{2,3,4\}$ (hodnota 3 proměnné A má např. podporu (3,1,2) pro (A,B,C))
 $A \neq B$ je hranově konzistentní pro $A \in \{0,1\}$, $B \in \{1,2,3\}$
 $A=B$ není hranově konzistentní pro $A \in \{1,2,3\}$, $B \in \{1,2\}$ (hodnota 3 proměnné A není podporována)
- **CSP je hranově konzistentní**, pokud jsou všechny podmínky hranově konzistentní.

Zajištění hranové konzistence

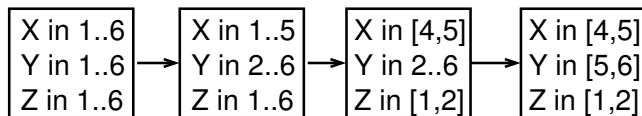
- Jak zařídit hranovou konzistenci v CSP?
- Každá podmínka musí být zrevidována
- Příklad:

$X \text{ in } 1..6, Y \text{ in } 1..6, Z \text{ in } 1..6, X < Y, Z < X-2$

$X < Y$

$Z < X-2$

$X < Y$



- Stačí to?
- ⇒ Nestačí ale zrevidovat každou podmínku pouze jednou
- Revize je potřeba opakovat, dokud se mění doména nějaké proměnné (algoritmus AC-1)

Hranová konzistence prakticky

- Použijeme **frontu proměnných** se změněnou doménou.
 - uživatelé mohou pro každou podmínku specifikovat, kdy se má provést její revize v závislosti na typu změny domény
- Vychází z algoritmus AC-3 (pracuje s frontou podmínek k revizi) a je nazývaný AC-8 (pracuje s frontou proměnných)
- **procedure AC-8(V,D,C)**
Q := V
while Q neprázdná do
 vyber v z Q
 for c ∈ C takovou, že v je omezeno c do
 D' := c.REVISE(D)
 if (libovolná doména v D' prázdná) then return(fail,D')
 Q := Q ∪ {u ∈ V | D'_u ≠ D_u}
 D := D'
return(true,D)
end AC-8
- Poznámka: do fronty vkládáme jen ty proměnné, které tam ještě nejsou
 - revize se pro ně provede, protože už ve frontě jsou

Příklad: sudoku

			2		5			
	9					7	3	
		2			9		6	
2						4		9
				7				
6		9						1
	8		4			1		
	6	3					8	
			6		8			

Přiřaď prázdným polím čísla tak, že:
čísla odlišná na řádku, ve sloupci a v bloku

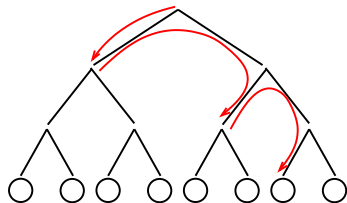
Konzistenční techniky jsou (obvykle) neúplné

⇒ potřeba prohledávací algoritmus, který vyřeší "zbytek"

- př. $X \in 1..2, Y \in 1..2, Z \in 1..2, X \neq Y, Y \neq Z, X \neq Z$
AC neodstraní žádnou hodnotu ale problem je nekonzistentní

Přirázování (*labeling*)

- prohledávání do hloubky (DFS/BT)
 - přiřadit hodnotu do proměnné
 - propaguj = udělej
problém lokálně konzistentní
 - vrať se v případě neúspěchu



- $X \in 1..5 \quad \equiv \quad X=1 \vee X=2 \vee X=3 \vee X=4 \vee X=5$

Obecně: **prohledávací algoritmus řeší zbylé disjunkce**

- $X=1 \vee X \neq 1$ standardní přiřazování
- $X < 3 \vee X \geq 3$ dělení domén
- $X < Y \vee X \geq Y$ uspořádání proměnných

- Prohledávání do hloubky je kombinováno s AC, které omezuje prohledávaný prostor
- Technika pohledu dopředu (MAC)
- procedure labeling(V, D, C)
 - if (všechny proměnné z V přiřazeny) then return V
 - vyber dosud nepřřazenou proměnnou x z V
 - for (každou hodnotu v z D_x) do
 - (TestOk, D') := consistent($V, D, C \cup \{x=v\}$)
 - if TestOk=true then $R :=$ labeling(V, D', C)
 - if $R \neq$ fail then return R
 - return fail
 - end labeling
- Před labeling je spuštěn iniciální běh konzistenčních algoritmů, aby byla zajištěna iniciální konzistence

Jaká proměnná má být ohodnocena první?

- princip prvotního neúspěchu (*first-fail*)
 - preferuj proměnnou, jejíž přiřazení je nejobtížnější
 - např. proměnné s nejmenší doménou:
doména se snadněji vyprázdní
 - nebo proměnné s nejvíce podmínkami: pro proměnné s více podmínkami je obecně obtížnější nalézt hodnotu proměnné
- definuje tvar **prohledávacího stromu**
 - výběr proměnné s malou velikostí domény: malé větvení na této úrovni
 - výběr proměnné s velkou velikostí domény: velké větvení na této úrovni

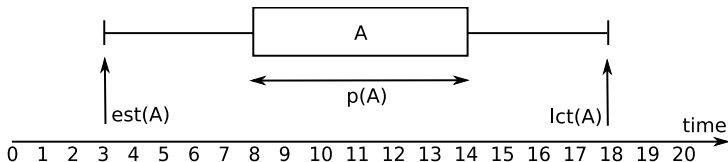
Jaká hodnota má být vyzkoušena první?

- princip prvotního úspěchu (*succeed-first*)
 - preferuj hodnoty, které nejspíše patří do řešení
 - např. hodnoty s nejvíce podporami v okolních proměnných
 - tato heuristika je obvykle problémově závislá
- definuje **pořadí procházení větví**

Aktivita A: entita vyžadující prostor (zdroje) a čas

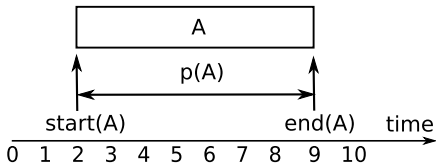
Proměnné a jejich domény pro časové přiřazení aktivity

- **start(A)**: startovní čas aktivity
 - aktivita nemůže začít před svým **termínem dostupnosti**
 - $est(A) = \min(\text{start}(A))$, earliest start time/nejdřívejší startovní čas
- **end(A)**: čas skončení aktivity
 - aktivita musí skončit před svým **deadline**
 - $lct(A) = \max(\text{end}(A))$, latest completion time/nejpozdější koncový čas
- **p(A)**: doba provádění aktivity
 - $\text{start}(A) = \{\text{est}(A), \dots, (\text{lct}(A) - p(A))\}$
 - $\text{end}(A) = \{(\text{est}(A) + p(A)), \dots, \text{lct}(A)\}$

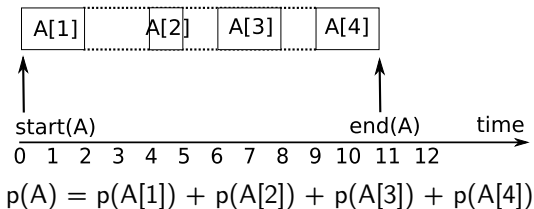


Rozvrhování jako CSP: základní omezení I.

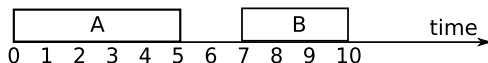
- **Nepřerušitelná aktivita:** žádné přerušení během jejího zpracování
 - $\text{start}(A) + p(A) = \text{end}(A)$



- **Přerušitelná aktivita:** může být přerušena během svého zpracování
 - $\text{start}(A) + p(A) \leq \text{end}(A)$



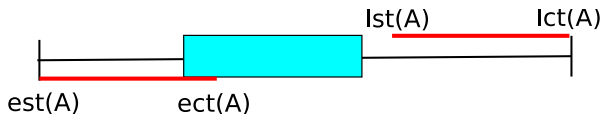
- Seřazení $A \ll B$ aktivity A,B
(také: **precedenční omezení** mezi aktivitami A,B)
 - $\text{end}(A) \leq \text{start}(B)$



- **Disjunktivní omezení:** nepřekrývání aktivit A a B
 - nepřerušitelné aktivity
 - $A \ll B$ or $B \ll A$
 - $\text{end}(A) \leq \text{start}(B)$ or $\text{end}(B) \leq \text{start}(A)$
 - viz dále unární zdroje

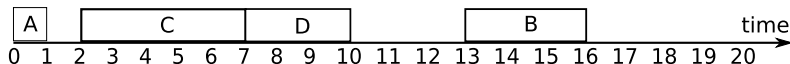
Doménové proměnné pro zdroje:

- **cap(A)**: požadovaná kapacita zdroje aktivitou A
 - unární/disjunktivní zdroje
 - v daném čase může být zpracována maximálně jedna aktivita
 - kumulativní zdroje
 - několik aktivit se může zpracovávat paralelně, ovšem za předpokladu, že není překročena kapacita zdroje
 - produkovatelné/spotřebovatelné zdroje
 - aktivita konzumuje (snižuje) nebo produkuje (navyšuje) aktuální množství zdroje
 - na zdroji musí zůstat nějaká minimální volná kapacita a maximální kapacita zdroje nemůže být překročena
 - příklad: reservoár
- **resource(A)**: alternativní zdroje pro A
 - pro zpracování A vybereme jeden z alternativních zdrojů
 - jednotlivé hodnoty z domény resource(A) odkazují na konkrétní zdroje



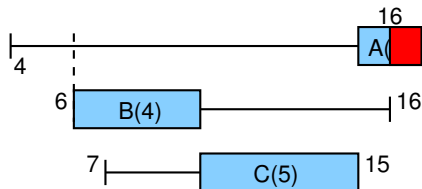
- $est(A)$ nejdřívější startovní čas aktivity A (earliest start time)
 - $ect(A)$ nejdřívější koncový čas aktivity A (earliest completion time)
 - $lst(A)$ nejpozdější startovní čas aktivity A (latest start time)
 - $lct(A)$ nejpozdější koncový čas aktivity A (latest completion time)
-
- Ω je množina aktivit
 - $p(\Omega) = \sum_{A \in \Omega} p(A)$
 - $est(\Omega) = \min\{est(A) \mid A \in \Omega\}$
 - $lct(\Omega) = \max\{lct(A) \mid A \in \Omega\}$

- **Aktivita se nemohou překrývat**
 - v daném čase běží maximálně jedna aktivita, proto se těmto zdrojům říká **unární**
 - Grahamova klasifikace: jeden stroj
- Předpokládáme, že aktivity jsou **nepřerušitelné**
 - nepřerušitelná aktivita zabírá zdroj od svého startu až do ukončení
- Jednoduchý model s **disjunktními omezeními**
 - $A \ll B \vee B \ll A$
 $\text{end}(A) \leq \text{start}(B) \vee \text{end}(B) \leq \text{start}(A)$
 - těmto zdrojům se proto někdy říká **disjunktní**

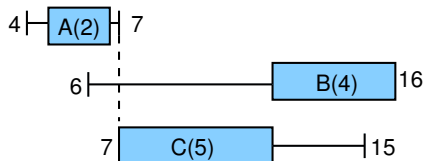


Hledání hran (*edge finding*)

- Baptiste & Le Pape (1996)
- Co se stane, pokud nebude aktivita A zpracována jako první?

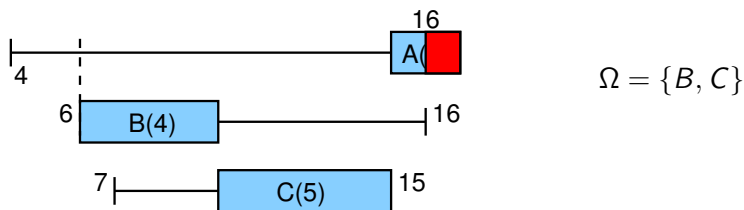


- Pro A,B,C není dost času, a tedy aktivita A musí být první



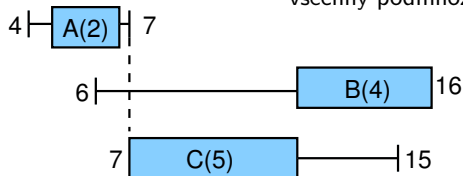
Hledání hran: příklad s odvozovacími pravidly

- $lct(\Omega \cup \{A\}) - est(\Omega) < p(\Omega \cup \{A\}) \Rightarrow A \ll \Omega$



- $A \ll \Omega \Rightarrow end(A) \leq \min\{lct(\Omega') - p(\Omega') \mid \Omega' \subseteq \Omega\}$

všechny podmnožiny Ω musí stihnout své zpracování

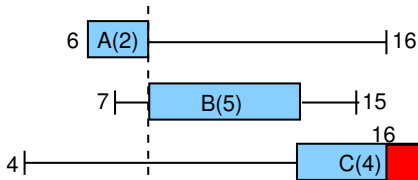


Hledání hran: všechna odvozovací pravidla

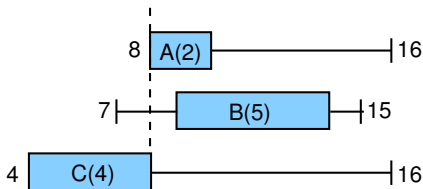
- **Odvozovací pravidla: pro $end(A)$**
(co se stane, pokud nebude aktivita A zpracována jako první?)
 - $lct(\Omega \cup \{A\}) - est(\Omega) < p(\Omega \cup \{A\})$
 $\Rightarrow A \ll \Omega$
 - $A \ll \Omega \Rightarrow$
 $end(A) \leq \min\{lct(\Omega') - p(\Omega') \mid \Omega' \subseteq \Omega\}$
- **Symetrická odvozovací pravidla: pro $start(A)$**
(co se stane, pokud nebude aktivita A zpracována jako poslední?)
 - $lct(\Omega) - est(\Omega \cup \{A\}) < p(\Omega \cup \{A\})$
 $\Rightarrow \Omega \ll A$
 - $\Omega \ll A \Rightarrow$
 $start(A) \geq \max\{est(\Omega') + p(\Omega') \mid \Omega' \subseteq \Omega\}$
- **V praxi:**
 - celkem existuje $n \cdot 2^n$ párů A, Ω (příliš mnoho!)
 - Carlier & Pinson 1994, Vilím & Barták & Čepěk 2004
algoritmus s časovou složitostí $O(n \log n)$
(je nutné kontrolovat pouze některé páry A, Ω)

Ne-první/ne-poslední (*not-first/not-last*)

- Torres & Lopez 2000
- Co se stane, pokud aktivita A **bude** zpracována jako první?

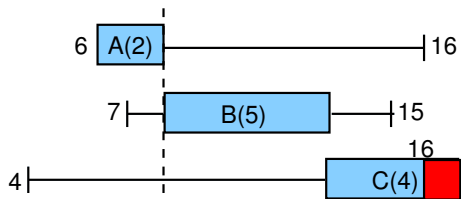


- Pro B a C není dost času, a tedy aktivita A nemůže být první



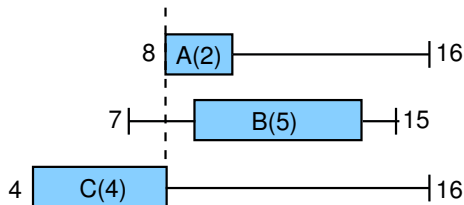
Ne-první/ne-poslední: př. s odvozovacími pravidly

- $p(\Omega \cup \{A\}) > lct(\Omega) - est(A) \Rightarrow \neg A \ll \Omega$



$$\Omega = \{B, C\}$$

- $\neg A \ll \Omega \Rightarrow start(A) \geq \min\{ect(B) \mid B \in \Omega\}$



- Ne-první pravidla:

(co se stane, pokud aktivita A bude zpracována jako první?)

- $p(\Omega \cup \{A\}) > lct(\Omega) - est(A)$
 $\Rightarrow \neg A \ll \Omega$
- $\neg A \ll \Omega$
 $\Rightarrow start(A) \geq \min\{ect(B) | B \in \Omega\}$

- Ne-poslední (symetrická) pravidla:

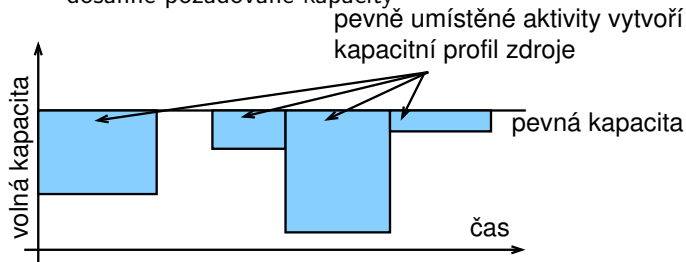
(co se stane, pokud aktivita A bude zpracována jako poslední?)

- $p(\Omega \cup \{A\}) > lct(A) - est(\Omega)$
 $\Rightarrow \neg \Omega \ll A$
- $\neg \Omega \ll A \Rightarrow$
 $end(A) \leq \max\{lst(B) | B \in \Omega\}$

- V praxi:

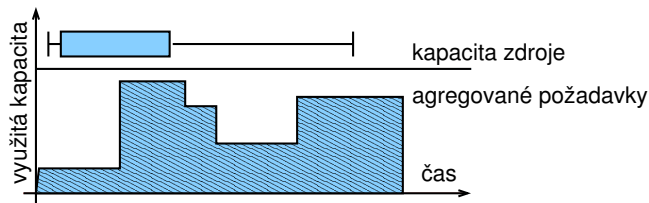
- Vilím 2004: algoritmus s časovou složitostí $O(n \log n)$

- Každá **aktivita využívá jistou kapacitu** zdroje $cap(A)$
- Aktivita mohou být **zpracovány paralelně**, pokud není překročena kapacita zdroje
- Kapacita zdroje **může být v čase proměnná**
 - takové zdroje lze modelovat pomocí v čase neměnné kapacity, od které se odečte kapacita pevně umístěných aktivit, čímž se v každém čase dosáhne požadované kapacity

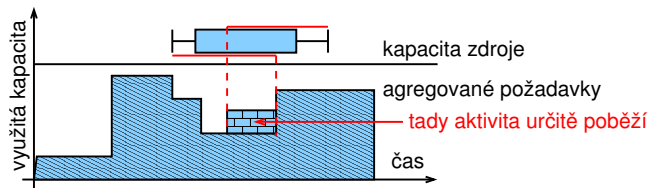


Agregované požadavky

- Baptiste et al. 2001
- Kdy je dostatečná kapacita pro zpracování aktivity?



- Jak se konstruuje graf agregovaných požadavků?



Podmínka tabulky (*timetable constraint*)

- Uvažujeme diskrétní čas
- Jak zajistit, že v žádném čase není překročena maximální kapacita?

$$\forall t \quad \sum_{start(A_i) \leq t \leq end(A_i)} cap(A_i) \leq MaxCapacity$$

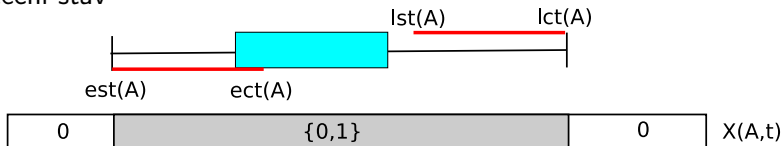
- Tabulka (*timetable*) pro aktivitu A je množina boolovských proměnných $X(A, t)$ udávajících, zda A běží v čase t

$$\forall t \quad \sum_{A_i} X(A_i, t) cap(A_i) \leq MaxCapacity$$

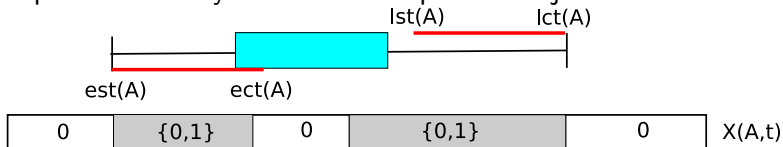
$$\forall t, i \quad start(A_i) \leq t \leq end(A_i) \Leftrightarrow X(A_i, t)$$

Podmínka tabulky: př. s odvozovacími pravidly

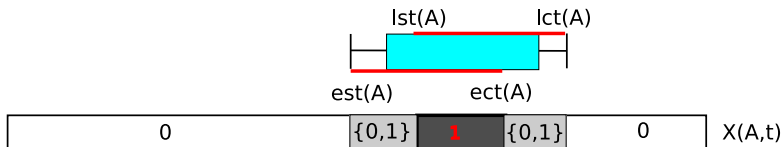
Počáteční stav



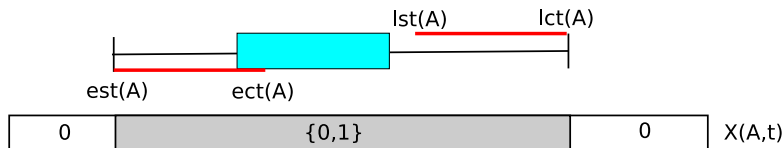
Některé pozice zakázány vzhledem ke kapacitě zdroje



Nový stav



Podmínka tabulky: odvozovací pravidla



Jak realizovat filtraci přes omezení

$$\forall t, i \text{ start}(A_i) \leq t < \text{end}(A_i) \Leftrightarrow X(A_i, t) ?$$

Problém: t je zároveň index a také proměnná

- $\text{start}(A) \geq \min\{t \mid 1 \in X(A,t)\}$
- $\text{end}(A) \leq 1 + \max\{t \mid 1 \in X(A,t)\}$
- $X(A,t)=0 \wedge t < \text{ect}(A) \Rightarrow \text{start}(A) > t$
- $X(A,t)=0 \wedge \text{lst}(A) \leq t \Rightarrow \text{end}(A) \leq t$
- $\text{lst}(A) \leq t \wedge t < \text{ect}(A) \Rightarrow X(A,t)=1$

Máme zadány zdroj s kapacitou 2 a aktivity

j	cap(j)	est(j)	lct(j)	p(j)
A	2	1	6	3
B	1	3	9	4
C	1	0	3	2

- Jak jsou inicializovány proměnné $X(j,t)$?
- Jak se jejich hodnoty mění při použití odvozovacích pravidel podmínky tabulky?
- Jak by mohly vypadat výsledné rozvrhy po aplikaci pravidel?

Disjunktivní omezení

- známe: unární zdroje, nepřerušitelné aktivity
- rozšíření: přerušitelné aktivity, kumulativní zdroje

Hledání hran

- známe: unární zdroje, nepřerušitelné aktivity
- rozšíření: přerušitelné aktivity, kumulativní zdroje

Ne-první/ne-poslední

- známe: unární zdroje, nepřerušitelné aktivity
- rozšíření: kumulativní zdroje

Podmínka tabulky

- známe: kumulativní zdroje, nepřerušitelné aktivity
- rozšíření: přerušitelné aktivity

Jak modelovat alternativní zdroje pro danou aktivitu?

Pro každý zdroj uděláme **duplikát aktivity**

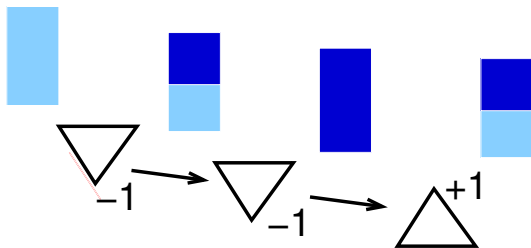
- duplikát se účastní příslušných zdrojových podmínek, ale neomezuje další aktivity na daném zdroji
 - „neúspěch“ u duplikátu znamená odstranění zdroje z domény proměnné $\text{resource}(A)$ příslušné aktivity
 - odstranění zdroje z domény proměnné $\text{resource}(A)$ znamená „smazání“ odpovídajícího duplikátu
- původní aktivita se účastní precedenčních podmínek (např. v rámci multi-operační úlohy)
- omezení časů u duplikátu se propaguje do originálu aktivity a naopak

Nechť A_u reprezentuje duplikát aktivity A na zdroji $u \in \text{resource}(A)$, pak probíhají následující propagace:

- $u \in \text{resource}(A) \Rightarrow \text{start}(A) \leq \text{start}(A_u)$
- $u \in \text{resource}(A) \Rightarrow \text{end}(A_u) \leq \text{end}(A)$
- $\text{start}(A) \geq \min\{\text{start}(A_u) : u \in \text{resource}(A)\}$
- $\text{end}(A) \leq \max\{\text{end}(A_u) : u \in \text{resource}(A)\}$
- neúspěch pro $A_u \Rightarrow \text{resource}(A) \setminus \{u\}$

Produkovatelné/spotřebovatelné zdroje

- Zdroj = rezervoár
- Aktivita konzumuje nějaké množství zdroje $\text{cap}(A) < 0$ nebo aktivita produkuje nějaké množství zdroje $\text{cap}(A) > 0$
- Požadována minimální kapacita zdroje (při konzumaci) a maximální kapacita zdroje nemůže být překročena (produkcí)

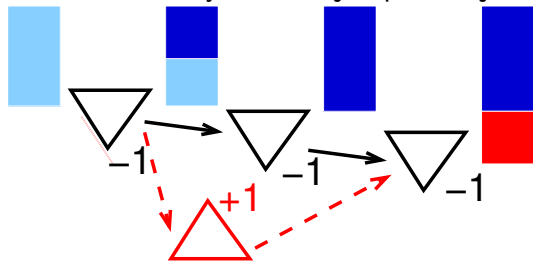


- **Kumulativní zdroj** může být chápán jako speciální případ rezervoáru
 - každá aktivita konzumuje $\text{cap}(A)$ při startu a produkuje $\text{cap}(A)$ na konci

Relativní uspořádání

- Pokud je čas relativní (uspořádání aktivit)
potom techniky edge finding a agregovaných požadavků **nic neodvodí**
- Pořád ale můžeme používat informace o uspořádání aktivit a spotřebě/produkci daného zdroje
- Příklad:

rezervoár: aktivity konzumují a produkují zdroj



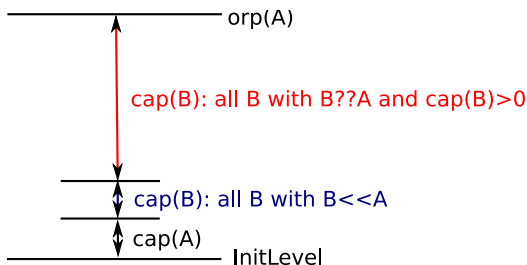
Lze odvodit nezbytnost přidavné aktivity produkující jednotku zdroje

orp(A): maximální možná úroveň zdroje v čase, kdy se A začne zpracovávat

Aktivity, které **musí** být před A, se vezmou dohromady s produkčními aktivitami, které **mohou** být před A

$$orp(A) = InitLevel + cap(A) + \sum_{B \ll A} cap(B) + \sum_{B ?? A \ \& \ cap(B) > 0} cap(B)$$

Příklad:

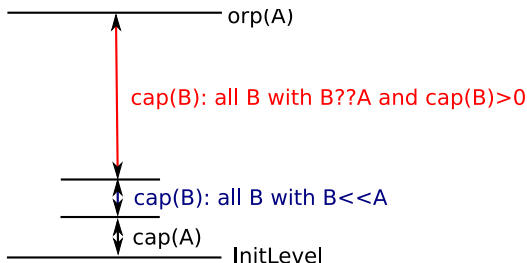


B ?? A znamená, že pořadí A a B ještě není známé

orp odvozovací pravidla I.

$orp(A) < MinLevel \Rightarrow fail$

- i když je veškerá produkce plánována před A není dosažena minimální požadovaná úroveň zdroje



$$orp(A) = InitLevel + cap(A) + \sum_{B \ll A} cap(B) + \sum_{B??A \ \& \ cap(B) > 0} cap(B)$$

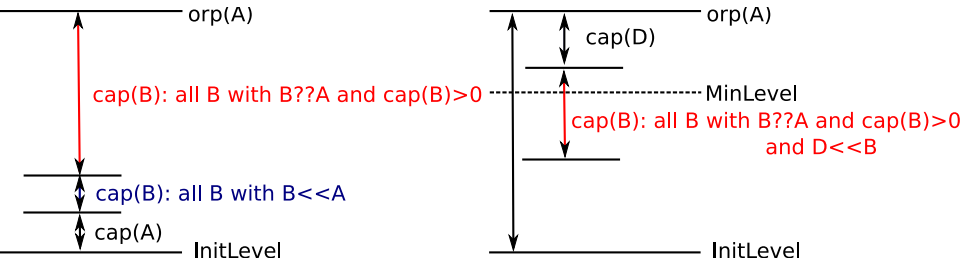
orp odvozovací pravidla II.

$$\text{orp}(A) - \text{cap}(D) - \sum_{D \ll B \ \& \ B ?? A \ \& \ \text{cap}(B) > 0} \text{cap}(B) < \text{MinLevel} \\ \Rightarrow D \ll A$$

Uvažujme časový okamžik, kdy začne aktivita A

- pro libovolné D takové, že $D ?? A$ a $\text{cap}(D) > 0$:
pokud je produkce v D plánována za A a minimální požadovaná úroveň zdroje není dosažena, pak musí být D před A

Příklad:



Optimistický zdrojový profil: cvičení

$$orp(A) = InitLevel + cap(A) + \sum_{B \ll A} cap(B) + \sum_{B ?? A \ \& \ cap(B) > 0} cap(B)$$

$$orp(A) - cap(D) - \sum_{D \ll B \ \& \ B ?? A \ \& \ cap(B) > 0} cap(B) < MinLevel \\ \Rightarrow D \ll A$$

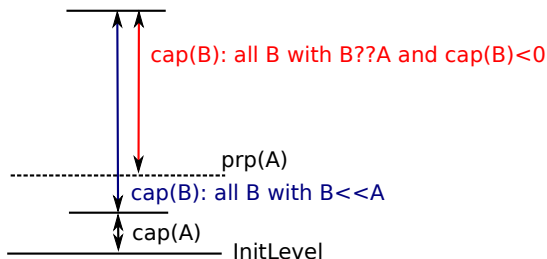
- Máme dány aktivity A, B, C, X, Y, Z
a jejich požadované kapacity jsou po řadě 1, 2, 3, 4, 5, -1
- Jsou dány precedence: $A \ll B \ll C, X \ll Y$
- $InitLevel = MinLevel = 0$
- Jaká je hodnota $orp(A)$?
- Může být X naplánováno po A ?
- Co se změní, pokud bychom přidali aktivitu D s následujícími vlastnostmi?
 - $cap(D) = -2$
 - $D \ll A$

prp(*A*): minimální možná úroveň zdroje v čase, kdy se *A* začne zpracovávat

Aktivity, které **musí** být před *A*, se vezmou dohromady s konzumačními aktivitami, které **mohou** být před *A*

$$prp(A) = InitLevel + cap(A) + \sum_{B \ll A} cap(B) + \sum_{B ?? A \ \& \ cap(B) < 0} cap(B)$$

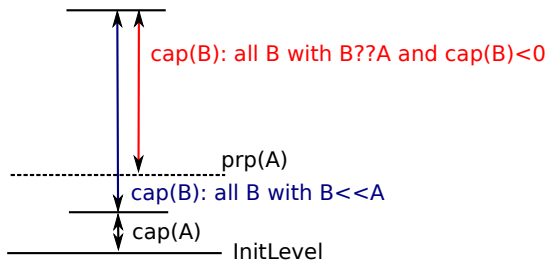
Příklad:



prp odvozovací pravidla I.

$prp(A) > MaxLevel \Rightarrow fail$

- i když je veškerá konzumace plánována před A, maximální povolená kapacita zdroje je překročena



$$prp(A) = InitLevel + cap(A) + \sum_{B << A} cap(B) + \sum_{B ?? A \ \& \ cap(B) < 0} cap(B)$$

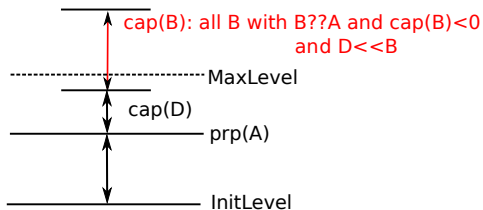
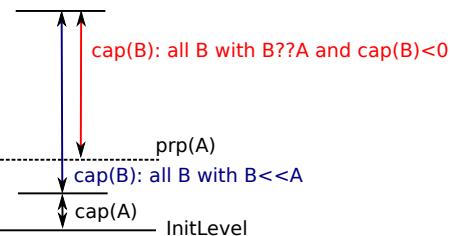
prp odvozovací pravidla II.

$$\text{prp}(A) - \text{cap}(D) - \sum_{D \ll B \ \& \ B??A \ \& \ \text{cap}(B) < 0} \text{cap}(B) > \text{MaxLevel} \\ \Rightarrow D \ll A$$

Uvažujme časový okamžik, kdy začne aktivita A:

- pro libovolné D takové, že $D??A$ a $\text{cap}(D) < 0$:
jestliže je konzumace v D plánována po A a je překročena maximální povolená úroveň zdroje, pak musí být D před A

Příklad:



Pro reprezentaci zdrojů využívány v programovacích jazycích tzv. **globální podmínky**

- definované pro libovolný konečný počet proměnných
- komplexní podmínky s vlastním propagačním algoritmem

Základní globální podmínky (pro rozvrhování)

- příklady z IBM ILOG OPL (Optimization Programming Language)
- všechny proměnné různé
 - `allDifferent`
- disjunktivní zdroj
 - `dvar interval`, `dvar sequence`
 - `noOverlap`
- kumulativní zdroj
 - `cumuFunction`, `pulse`

Proměnné v poli Array jsou různé

- reprezentace **unárního zdroje s jednotkovou dobou trvání všech aktivit**
- `dvar int Array[Interval];`
- globální podmínka: `allDifferent(Array)`

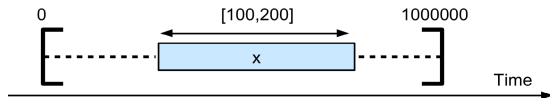
Příklad: učitelé musí učit v různé hodiny

- Jan = 6, Ota = 2, Anna = 5,
Marie = 1, Petr $\in \{3, 4\}$, Eva $\in \{3, 4\}$

učitel	min	max
Jan	3	6
Petr	3	4
Anna	2	5
Ota	2	4
Eva	3	4
Marie	1	6

Intervalová proměnná: pro modelování časového intervalu (úlohy, aktivity)

- hodnotou intervalové proměnné je celočíselný interval $[start, end]$
- příklad: `dvar interval x in 0..1000000 size 100..200;`



Sekvenční proměnná p

- definována na množině intervalových proměnných x
`dvar interval x[i in 1..n] ...;`
`dvar sequence p in x;`
- hodnota intervalové proměnné p je permutace přítomných intervalů
 - pozor, permutace t ještě neimplikuje žádné uspořádání v čase

Omezení `noOverlap(p)`

- vyjadřuje, že sekvenční proměnná p reprezentuje řetězec nepřekrývajících se intervalových proměnných
- pro vyjádření rozvrhování na unárním/disjunktivním zdroji, kde se intervaly/úlohy nepřekrývají

Precedence, účelová funkce

Mezi intervalovými proměnnými můžeme definovat precedenční podmínky:

```
dvar interval i;  
dvar interval j;  
  
endBeforeStart(i, j);  
startBeforeStart(i, j);  
startAtStart(i, j);  
...
```

Pro vytváření účelových funkcí nebo definici omezení

```
startOf(x)  
endOf(x)  
sizeOf(x, V)
```

Příklad: minimalizace makespanu

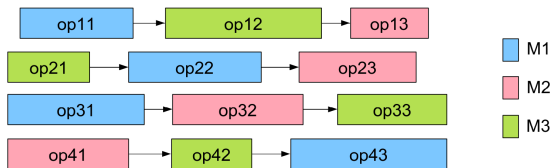
```
minimize max(i in 1..n) endOf(x[i])
```


Příklad: rozvrhování problému job-shop

```
tuple Operation {  
  int mch; // machine  
  int pt;  // processing time  
};  
Operation Ops[j in Jobs][p in Pos] = ...;
```

```
1  dvar interval op[j in Jobs][p in Pos] size Ops[j][p].pt;  
2  dvar sequence mchs[m in Mchs] in  
3    all(j in Jobs, p in Pos: Ops[j][p].mch == m) op[j][p];  
4  
5  minimize max(j in Jobs) endOf(op[j][nbPos]);  
6  subject to {  
7    forall(m in Mchs)  
8      noOverlap(mchs[m]);  
9    forall(j in Jobs, p in 2..nbPos)  
10     endBeforeStart(op[j][p-1], op[j][p]);  
11 }
```

`op[j][p]` odkazuje operaci úlohy `j`, která je zpracovávána v rámci úlohy jako `p`-tá

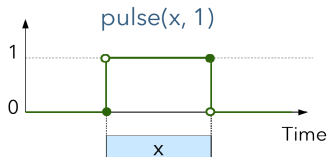


Kumulativní zdroj pomocí kumulativní funkce

Hodnota **výrazu kumulativní funkce** reprezentuje vývoj kvantity v čase, která může být inkrementálně změněna (snížena nebo navýšena) intervalovými proměnnými.

Intervalové proměnné $x[i]$ přispívají do kumul. funkce po dobu svého provádění

```
int capacity[1..5] = [1,3,2,4,1];  
cumulFunction y = sum(i in 1..5) pulse(x[i],capacity[i]);
```



Omezení na výrazech kumulativní funkce: pro **omezení kapacity zdroje**

```
int h = ...  
cumulFunction f = ...  
f <= h
```

Příklad: job-shop a omezení celkového počtu strojů

```
cumulFunction allMachines = sum(j in Jobs, p in Pos) pulse(op[j][p],1);  
allMachines <= m;
```

Prohledávání/přiřazování (opakování)

Konzistenční techniky jsou (obvykle) neúplné

⇒ potřeba prohledávací algoritmus, který vyřeší "zbytek"

Přiřazování (*labeling*)

- prohledávání do hloubky (DFS/BT)
 - přiřad' hodnotu do proměnné
 - propaguj = udělej
problém lokálně konzistentní
 - vrať se v případě neúspěchu

Jaká proměnná má být ohodnocena první?

- princip prvotního neúspěchu (*first-fail*)
 - preferuj proměnnou, jejíž přiřazení je nejobtížnější (hrozí u ní nebezpečí failu)

Jaká hodnota má být vyzkoušena první?

- princip prvotního úspěchu (*succeed-first*)
 - preferuj hodnoty, které nejspíše patří do řešení

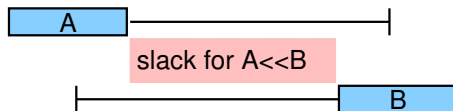
Větvení = řešení disjunkcí

Tradiční rozvrhovací přístupy

- kritická rozhodnutí se dělají první
 - vyřeš kritická místa (*bottlenecks*), ...
 - definuje tvar prohledávacího stromu
 - podobně jako princip prvního neúspěchu (*first-fail*)
- preferuj alternativy s větší flexibilitou
 - definuje pořadí větví pro prozkoumání
 - podobně jako princip prvního úspěchu (*succeed-first*)

Jak popsat, co je kritické a co je flexibilní?

- **Rezerva (*slack*)** je formální popis flexibility
- Rezerva pro **dané pořadí dvou aktivit**
„volný čas pro posunování aktivit“



$$\text{slack}(A \ll B) = \max(\text{end}(B)) - \min(\text{start}(A)) - p(A) - p(B)$$

- Rezerva pro **dvě aktivity** (bez určení pořadí)
 $\text{slack}(\{A, B\}) = \max(\text{slack}(A \ll B), \text{slack}(B \ll A))$
- Rezerva pro **skupinu aktivit**
 $\text{slack}(\Omega) = \max(\text{end}(\Omega)) - \min(\text{start}(\Omega)) - p(\Omega)$

Větvení uspořádáním dvojic aktivit

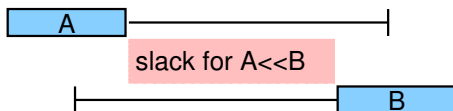
$$A \ll B \quad \vee \quad \neg A \ll B$$

Jaké aktivity mají být uspořádány první?

- nejkritičtější pár (first-fail)
- pár s minimální rezervou $slack(\{A, B\})$

Jaké pořadí aktivit má být zvoleno?

- nejflexibilnější pořadí (succeed-first)
- pořadí maximalizující $slack(A??B)$
- Příklad: vybereme pořadí $A \ll B$



Bodů volby při n aktivitách: $O(n^2)$

$$(A \ll \Omega \vee \neg A \ll \Omega) \quad \vee \quad (\Omega \ll A \vee \neg \Omega \ll A)$$

Máme hledat první nebo poslední aktivitu?

- díváme se na množinu možných kandidátů na první aktivitu a na množinu možných kandidátů na poslední aktivitu
- vybereme **menší z těchto dvou množin** (first-fail)
 - menší počet kandidátů znamená, že je těžší najít vhodného kandidáta

Jaká aktivita má být vybrána?

- pokud se hledá první aktivita, potom preferuj aktivitu, která má **nejmenší** $\min(\text{start}(A))$
- pokud se hledá poslední aktivita, potom preferuj aktivitu, která má **největší** $\max(\text{end}(A))$

Bodů volby: $O(n)$

Zdrojová rezerva je definovaná jako rezerva množiny aktivit zpracovávaných daným zdrojem

Jak používat zdrojovou rezervu?

- pokud volíme zdroj, na kterém budou **aktivity uspořádány jako první**
 - vyber zdroj s minimální rezervou (**kritické místo**)
- pokud volíme zdroj, na který **alokovat danou aktivitu**
 - vyber zdroj s maximální rezervou (**flexibilita**)

Problém splňování podmínek

- popis problému pomocí doménových proměnných a omezení
- konzistence a propagace
- prohledávání

Rozvrhování jako problém splňování podmínek

- doménové proměnné pro čas a zdroje
- propagační algoritmy pro
 - unární zdroje
 - kumulativní zdroje
 - produkovatelné a spotřebovatelné zdroje
 - alternativní zdroje
- globálních podmínky pro zdroje
- prohledávání
 - pojem rezervy
 - přístupy k větvení

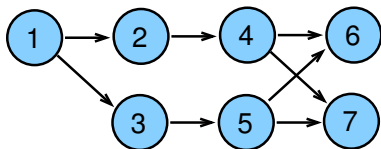
Plánování projektu

13. května 2021

- 16 Úvod
- 17 Repräsentace projektu
- 18 Neomezené zdroje
- 19 Variabilní doba trvání
- 20 Přidání pracovní síly

- Zprostředkování, instalace a testování rozsáhlého počítačového systému
 - projekt zahrnuje
 - evaluace a výběr hardware, vývoj software, nábor a školení lidí, testování a ladění systému, . . .
 - precedenční vztahy
 - některé úlohy mohou být prováděny paralelně
 - úloha musí být realizována až po dokončení jiných úloh
 - cíl: **minimalizovat čas** na realizaci celého projektu
- Příklady dalších problémů
 - stavba nemovitostí, konstrukce center elektráren, vojenský průmysl

- Základní problém **plánování projektu**
 - precedenční podmínky
 - paralelní stroj s **neomezeným počtem strojů**
 - minimalizace maximálního času konce úloh (*makespan*)
 - relativně jednoduché na řešení



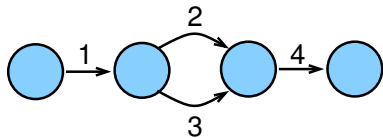
- Rozšíření
 - **variabilní doba trvání** (spojena s cenou provádění)
 - optimalizace: kompromis mezi cenou na ukončení projektu a cenou za zkrácení délky úloh
 - **pracovní síla** (skupiny operátorů s odlišnou specializací)
 - při sdílení omezeného množství operátorů nutno uvažovat **disjunktivní hrany**

⇒ komplexní problém, jehož řešení je velmi obtížné

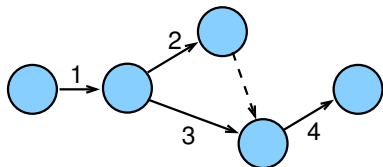
Reprezentace projektu: úloha jako hrana

- **Úloha jako hrana** mezi dvěma uzly
 - první uzel reprezentuje čas startu úlohy
 - druhý uzel reprezentuje čas konce úlohy

⇒ Dvě úlohy nemohou mít stejný startovní a koncový uzel



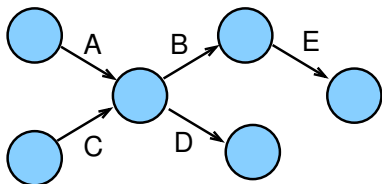
⇒ Musíme zavést **pomocné (dummy) úlohy**



Korektní vyjádření precedencí

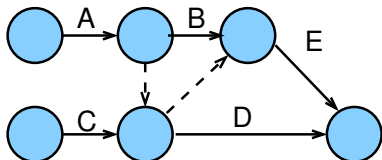
Úloha	Předchůdci
A	–
B	A
C	–
D	A,C
E	B,C

Je korektní tato reprezentace?



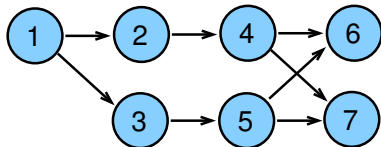
Není: B nemá předchůdce C

Musíme uvažovat následující reprezentaci

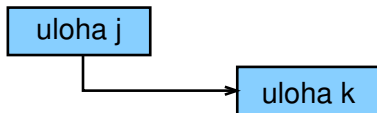


- Reprezentace: **úloha jako uzel**
 - hrany reprezentují precedenční podmínky
 - síť neobsahuje žádné orientované cykly

Úloha	Doba trvání	Předchůdci
1	2	–
2	3	1
3	1	1
4	4	2
5	2	3
6	1	4,5
7	3	4,5



- Běžně používána reprezentace úloha jako hrana
- Výhodnější ale úloha jako uzel
 - nejsou nutné redundantní hrany (pomocné úlohy) pro korektní vyjádření precedencí
 - úloha jako uzel lze převést na **úloha jako obdelník**
 - horizontální strany obdelníku použity jako časové osy odpovídající době provádění úlohy

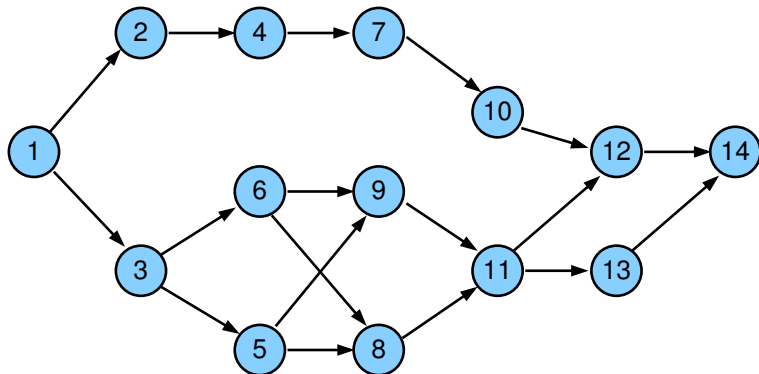


- Popis problému
 - m paralelně zapojených strojů
 - n úloh s precedenčními omezeními
 - doba provádění p_j
 - objektivní funkce: minimalizace maximálního času konce úloh (*makespan*)
- $P_{\infty} | prec | C_{max}$ (a $m \geq n$) polynomiální složitost, metoda kritické cesty
- $P_m | prec | C_{max}$ $2 \leq m < n$ NP úplný problém
- Značení
 - S'_j nejdřívější startovní čas úlohy j
 $C'_j = S'_j + p_j$ nejdřívější koncový úlohy j
 - S''_j nejpozdější startovní čas úlohy j
 C''_j nejpozdější koncový čas úlohy j
 - $Prec_j$ (přímí) předchůdci úlohy j
 $\forall k \in Prec_j$ všechny úlohy k , které předcházejí úlohu j
 $\forall j : k \in Prec_j$ všechny úlohy j , které následují úlohu k

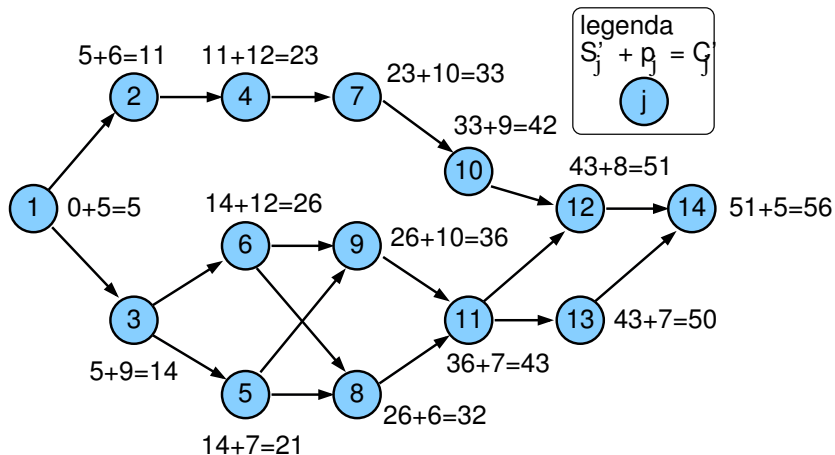
- Popis algoritmu pro nalezení **kritické cesty**
 - **dopředná procedura**
 - start v čase 0
 - výpočet **nejdřívějšího startovního času** každé úlohy
 - čas dokončení poslední úlohy je *makespan*
 - **zpětná procedura**
 - start v čase rovném *makespan*
 - výpočet **nejpozdějšího startovního času**, aby byl realizován tento *makespan*
- **Úloha s rezervou (*slack job*)**
 - její startovní čas může být odložen aniž je navýšen *makespan*
 - úloha, jejichž nejdřívější startovní čas je menší než nejpozdější startovní čas
- **Kritická úloha**
 - úloha, která nesmí být odložena
 - úlohy, jejichž nejdřívější startovní čas je roven nejpozdějšímu startovnímu čas
- **Kritická cesta**
 - řetěz úloh začínající v čase 0 a končící v čase C_{max}
 - v grafu může existovat více kritických cest
kritické cesty se mohou částečně překrývat
 - **graf kritických cest G_{CP}** : podgraf daný množinou kritických úloh a kritických cest

Kritická cesta: zadání příkladu

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
p _j	5	6	9	12	7	12	10	6	10	9	7	8	7	5

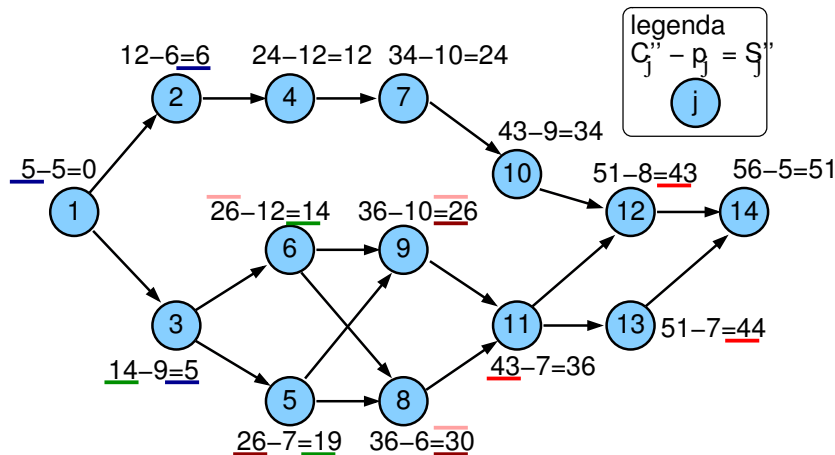


Příklad: dopředná procedura



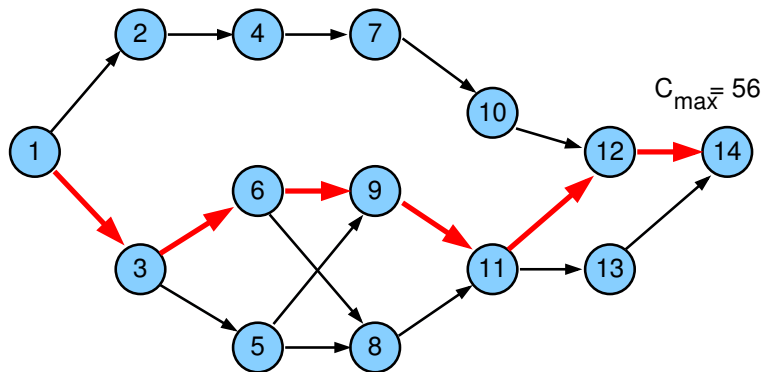
j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
p_j	5	6	9	12	7	12	10	6	10	9	7	8	7	5

Příklad: zpětná procedura



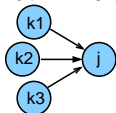
j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
p _j	5	6	9	12	7	12	10	6	10	9	7	8	7	5

Kritická cesta



1 Dopředná procedura

- 1 $t = 0$
- 2 pro všechny úlohy j bez předchůdce: $S'_j = 0, C'_j = p_j$
- 3 vypočítej postupně pro všechny zbývající úlohy j :

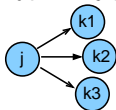


$$S'_j = \max_{\forall k \in \text{Prec}_j} C'_k, \quad C'_j = S'_j + p_j$$

- 4 optimální *makespan* je $C_{max} = \max(C'_1, \dots, C'_n)$

2 Zpětná procedura

- $t = C_{max}$
- pro všechny úlohy j bez následníka: $C''_j = C_{max}, S''_j = C_{max} - p_j$
- vypočítej postupně pro všechny zbývající úlohy j :

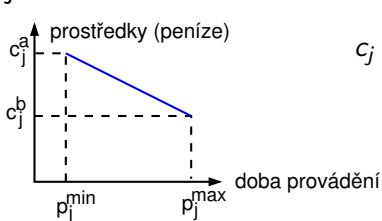


$$C''_j = \min_{\forall k: j \in \text{Prec}_k} S''_k, \quad S''_j = C''_j - p_j$$

- ověř, že $0 = \min(S''_1, \dots, S''_n)$

Kompromis mezi časem a cenou

- Lze uvažovat **variabilní dobu trvání úloh**
 - za předpokladu vyšší ceny lze zkrátit dobu provádění
- **Lineární cena**
- Doba trvání $p_j^{min} \leq p_j \leq p_j^{max}$
- **Marginální cena**: cena za zkrácení doby trvání úlohy o 1 časovou jednotku



$$c_j = \frac{c_j^a - c_j^b}{p_j^{max} - p_j^{min}}$$

- př. $p_j^{min} = 10$, $p_j^{max} = 15$, $c_j^b = 10$, $c_j^a = 20$, $c_j = 2$

⇒ cena provádění úlohy j po dobu p_j : $c_j^b + c_j(p_j^{max} - p_j)$

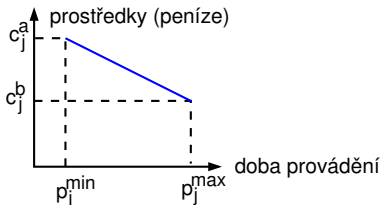
Cena za provádění projektu

- **Fixní režijní náklady c_0**
na časovou jednotku doby provádění projektu
- **Cena $F(p_j)$ za provádění projektu**
 - při době provádění úloh p_jurčena jako součet
 - ceny za provádění všech úloh
 - fixních režijních nákladů

celkem: $C_{\max} c_0$

$$F(p_j) = C_{\max} c_0 + \sum_j (c_j^b + c_j(p_j^{\max} - p_j))$$

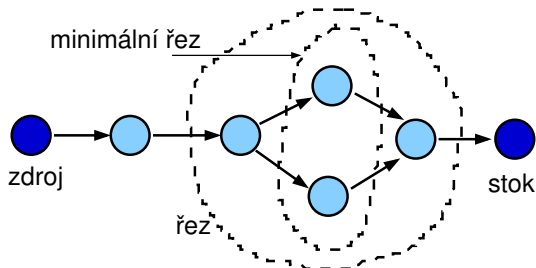
- Cíl: $\forall j$ nalézt p_j a S_j tak, aby byla $F(p_j)$ minimální



- Objektivní funkce: minimální cena projektu
- Kompromisní heuristika mezi časem a cenou
 - dobrá kvalita rozvrhu
 - použitelné i pro nelineární cenu
- Formulace lineárního programování
 - optimální rozvrh
 - nelineární verze obtížně řešitelné

Opakování: Řez, minimální řez

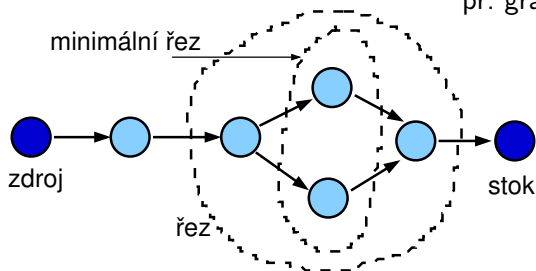
- Orientovaný graf $G = (V, E)$
- Počáteční uzel: zdroj $s \in V$
- Koncový uzel: stok $t \in V$
- **Řez:** ... také mluvíme o vrcholovém řezu
množina uzlů V' , jejíž smazáním z grafu se rozpojí zdroj a stok
 - E' množina hran incidentních s V'tj. v $G'=(V-V',E-E')$ neexistuje orientovaná cesta z s to t
- **Minimální řez:** řez U takový, že neexistuje řez $W \subset U$
 - tj. vrácení libovolného uzlu z U do grafu znovu spojí zdroj a stok



Řez, minimální řez II.

- Uvažujme orientovaný graf $G_0 = (V_0, E_0)$
- Do grafu přidáme zdroj:
 - nový vrchol s a
 - hrany S vedoucí z s do všech vrcholů G_0 bez předchůdců
- Do grafu přidáme stok:
 - nový vrchol t a
 - hrany T vedoucí ze všech vrcholů G_0 bez následníků do t
- Nový graf $G = (V, E)$: $V = V_0 \cup \{s, t\}$, $E = E_0 \cup S \cup T$
- Budeme hledat řezy a minimální řezy z s do t v G

př. graf má 4 minimální řezy

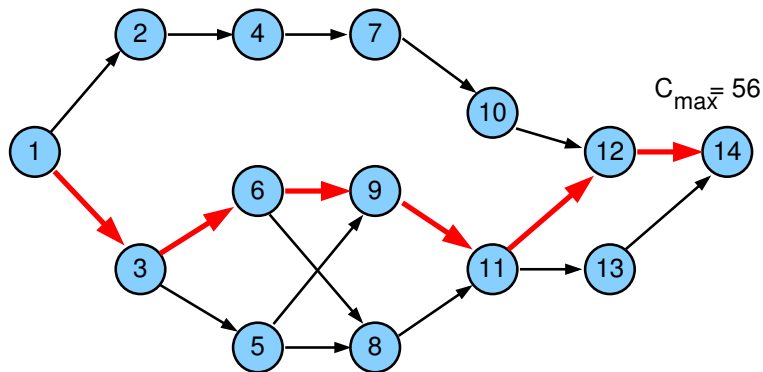


Kompromisní heuristika: příklad

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
p_j^{\max}	5	6	9	12	7	12	10	6	10	9	7	8	7	5
p_j^{\min}	3	5	7	9	5	9	8	3	7	5	4	5	5	2
c_j^b	20	25	20	15	30	40	35	25	30	20	25	35	20	10
c_j	7	2	4	3	4	3	4	4	4	5	2	2	4	8

fixní režijní náklady na časovou jednotku $c_0=6$

Příklad (pokračování): maximální doba provádění



Kompromisní heuristika: příklad

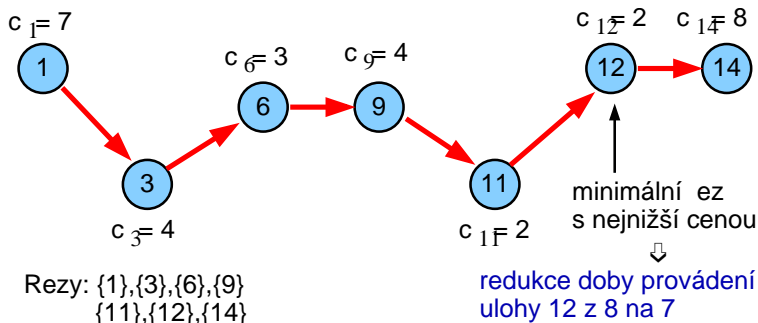
j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
p_j^{\max}	5	6	9	12	7	12	10	6	10	9	7	8	7	5
p_j^{\min}	3	5	7	9	5	9	8	3	7	5	4	5	5	2
c_j^b	20	25	20	15	30	40	35	25	30	20	25	35	20	10
c_j	7	2	4	3	4	3	4	4	4	5	2	2	4	8

Náklady na provedení projektu při maximální době trvání úloh

$$\begin{aligned}F(p_j^{\max}) &= C_{\max}c_0 + \sum_j (c_j^b + c_j(p_j^{\max} - p_j^{\min})) = \\&= C_{\max}c_0 + \sum_j c_j^b = \\&= 56 \times 6 + 20 + 25 + 20 + 15 + 30 + 40 + 35 + 25 + \\&\quad + 30 + 20 + 25 + 35 + 20 + 10 = \\&= 336 + 350 = 686\end{aligned}$$

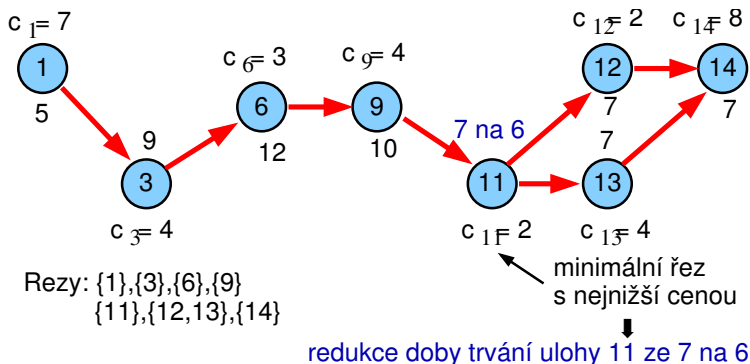
Podgraf s kritickou cestou (G_{CP})

- Kandidáti na redukci: uzel 11 a uzel 12, vybereme uzel 12



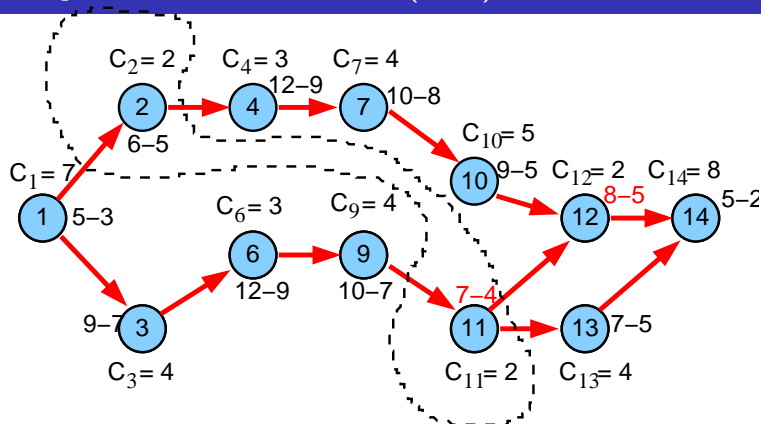
- Fixní režijní náklady se redukuje z 56×6 na $55 \times 6 = 330$
- Cena za provádění úloh naroste o $c_{12} = 2$, tj. $350 + 2 = 352$
- Celková cena klesla z 686 na $330 + 352 = 682$

Podgraf s kritickou cestou (G_{CP})



- Fixní režijní náklady se redukovávají z 55×6 na $54 \times 6 = 324$
- Cena za provádění úloh naroste o $c_{11} = 2$, tj. $324 + 2 = 326$
- Celková cena klesla z 682 na $324 + 354 = 678$

Podgraf s kritickou cestou (G_{CP})



další redukce: pro uzel 2 na 5 a pro uzel 11 na 5, ...

- Fixní režijní náklady se redukovují z 54×6 na $53 \times 6 = 318$
- Cena za provádění úloh naroste o $c_2 + c_{11} = 2 + 2$, tj. $354 + 4 = 358$
- Celková cena klesla z 678 na $318 + 358 = 676$

Algoritmus kompromisní heuristiky

- 1
 - Nastav doby provádění na jejich maximum: $p_j = p_j^{max}$
 - Urči všechny kritické cesty s těmito dobami provádění
 - Zkonstruuj graf G_{CP} kritických cest
- 2
 - Urči všechny **minimální řezy v G_{CP}**
 - pozn. pokud zkrátíme dobu provádění všech úloh v minimálním řezu, podaří se nám i zkrátit dobu provádění projektu!
 - Najdi **řezy, jejichž doba provádění je větší než jejich minimum:**
 $p_j > p_j^{min} \quad \forall j \in G_{CP}$
 - Pokud takový řez neexistuje STOP, jinak běž na krok 3
- 3
 - Pro každý minimální řez: spočítej cenu redukující všechny doby provádění o 1 časovou jednotku
 - Vyber **minimální řez s nejnižší cenou**
 - pozn. abychom za snížení zaplatili co nejnižší cenu
 - Jestliže je cena řezu menší než fixní režijní náklady c_0 za časovou jednotku běž na krok 4, jinak STOP
- 4
 - Redukuj všechny doby provádění v minimálním řezu o 1 časovou jednotku
 - Urči novou množinu kritických cest
 - Reviduj graf G_{CP} a běž na krok 2

Lineární program

- Heuristika negarantuje nalezení optima
- Celková cena je lineární

$$c_0 C_{max} + \sum_{j=1}^n \left(c_j^b + c_j (p_j^{max} - p_j) \right)$$

všimněte si: stejná účelová funkce jako cena za provádění projektu

- Lineární program:

minimalizace:

$$c_0 C_{max} - \sum_{j=1}^n c_j p_j$$

c_j^b a $c_j p_j^{max}$
se nemění

za předpokladu:

$$\begin{aligned} x_k - p_j - x_j &\geq 0 && \forall j \in Prec_k \\ p_j &\leq p_j^{max} && \forall j \\ p_j &\geq p_j^{min} && \forall j \\ x_j &\geq 0 && \forall j \\ C_{max} - x_j - p_j &\geq 0 && \forall j \end{aligned}$$

kde x_j je nejdřívější možný startovní čas úlohy j

- Pracovní síla = operátor = zdroj
- Problém popsán v literatuře jako
problém plánování projektu s omezenými zdroji
resource-constrained project scheduling problem (RCPSP)
 - n úloh
 - N zdrojů
 - R_i kapacita zdroje i
 - p_j doba provádění úlohy j
 - R_{ij} požadavek úlohy j na zdroj i
 - $Prec_j$ (přímí) předchůdci úlohy j

Formulace celočíselného programování

- Pomocná úloha $n + 1$ jako stok, $p_{n+1} = 0$
- $x_{jt} = 1$ úloha j je dokončena v čase t
 $x_{jt} = 0$ jinak
- Kapacita zdroje i , který potřebuje úloha j

v intervalu $[t - 1, t]$:
$$R_{ij} \sum_{u=t}^{t+p_j-1} x_{ju}$$

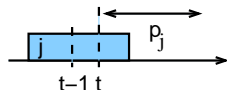
$\sum_{u=t}^{t+p_j-1} x_{ju} \dots$ počítá, zda úloha j běží v čase $[t - 1, t]$

př. úloha s $S_j = 2, p_j = 2$ a $t = 2, 3, 4, 5$ ($x_{j4} = 1$, pro $t = 3, 4$ úloha započítána)

- H jako horní hranice *makespan*:
$$H = \sum_{j=1}^n p_j$$

- Koncový čas úlohy j :
$$C_j = \sum_{t=1}^H t x_{jt}$$

- *Makespan*:
$$C_{max} = \sum_{t=1}^H t x_{n+1,t}$$
 koncový čas stoku



Minimalizace $\sum_{t=1}^H t x_{n+1,t}$ minimalizace *makespan*

za předpokladu

jestliže j je předchůdce k , pak $C_j \leq S_k$, tj. $C_j \leq C_k - p_k$, tj. $C_j + p_k - C_k \leq 0$

$$\sum_{t=1}^H t x_{jt} + p_k - \sum_{t=1}^H t x_{kt} \leq 0 \quad \forall j \in \text{Prec}_k$$

pro každý čas t : požadavek na zdroj i nepřeroste kapacitu i

$$\sum_{j=1}^n \left(R_{ij} \sum_{u=t}^{t+p_j-1} x_{ju} \right) \leq R_i \quad \forall i \forall t$$

každá úloha j skončí právě jednou

$$\sum_{t=1}^H x_{jt} = 1 \quad \forall j$$

- Řešení celočíselného programu obtížné
- Při velkém počtu úloh a dlouhém časovém horizontu
 - použití heuristik
- Lze použít programování s omezujícími podmínkami
 - kumulativní zdroje
 - precedenční podmínky
- Probírané speciální případy problému
 - *job shop + makespan*
 - *timetabling*

- Základní problém s neomezenými zdroji
 - metoda kritické cesty
- Neomezené zdroje + variabilní doba trvání (lineární)
 - kompromisní heuristika mezi časem a cenou
 - lineární programování
- Problém plánování projektu s omezenými zdroji
 - celočíselné programování
 - heuristiky
 - programování s omezujícími podmínkami

Plánování úloh (na jednom stroji)

13. května 2021

- 21 Řídící pravidla
- 22 Metoda větví a mezí
- 23 Paprskové prohledávání

- Dekompoziční problémy pro složité (*flexible*) *job shop* problémy používají
 - jeden stroj
 - paralelní strojjako podproblémy při řešení
- Metody řešení:
 - řídicí pravidla
 - metoda větví & mezí
 - paprskové prohledávání

Řídící pravidla pro jeden stroj: přehled

- C_{max} a $r_j = 0, d_j = \infty$ (snadné: nezávisí na rozvrhu)
- $\sum w_j C_j$ a $r_j = 0, d_j = \infty$
 - vážená nejkratší doba provádění (WSPT) je optimální
 - rozvrhuje úlohy v klesajícím pořadí podle w_j/p_j
- L_{max} a $r_j = 0$
 - nejdřívější termín dokončení (EDD) je optimální
 - rozvrhuje úlohy ve vzrůstající velikosti d_j
 - minimální rezerva (MS)
 - pravidlo příbuzné EDD ale dynamické
 - $\max(d_j - p_j - t, 0)$, kde je t aktuální čas
- L_{max} a rozdílné r_j
 - NP-těžký problém
 - základní podproblém v rámci známé heuristiky posouvání kritického místa
 - řešení pomocí metody větví a mezí nebo dynamického programování
- $\sum T_j, \sum w_j T_j$
 - mnohem obtížnější na optimalizaci
 - kompozitní řídicí pravidlo *apparent tardiness cost* (ATC) využívající kombinaci WSPT a MS

Řídící pravidla a paralelní stroj: přehled

- C_{max} : důležité kritérium při balancování zátěže strojů
 - NP-těžký
 - nejdelší doba provádění (LPT)
 - kratší úlohy odloženy, protože je snadnější je narozvrhovat
 - nalezne řešení s garancí rozsahu 33% optima
- $\sum C_j$ a $r_j = 0$
 - nepreemptivní nejkratší doba provádění (SPT)
 - nepreemptivní SPT minimalizuje $\sum C_j$
 - nepreemptivní SPT zůstává optimální i při povolených přerušeních
- $\sum w_j C_j$ a $r_j = 0$
 - NP-těžký
 - WSPT garantuje řešení v rámci 22% optima
- $\sum w_j T_j$
 - ještě obtížnější problém
 - lze použít ATC (apparent tardiness cost), ale kvalita řešení nemusí být dobrá

Vážený součet koncových časů pro jeden stroj

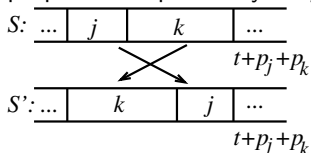
- Řídící pravidlo **vážená nejkratší doba trvání** (*weighted shortest processing time, WSPT*)

je optimální pro $1 || \sum w_j C_j$.

- WSPT rozvrhuje úlohy v klesajícím pořadí podle w_j/p_j

- Důkaz:

- předpokládejme, že to není pravda a že S je optimální
- pak existují **dvě sousední úlohy**, např. úloha j následovaná úlohou k takové, že $\frac{w_j}{p_j} < \frac{w_k}{p_k}$, tj. $p_k w_j < p_j w_k$
- po provedení párové výměny máme rozvrh S'



- Příspěvky do účelové funkce pro j a k :

$$S : (t + p_j)w_j + (t + p_j + p_k)w_k = tw_j + p_j w_j + tw_k + p_j w_k + p_k w_k$$

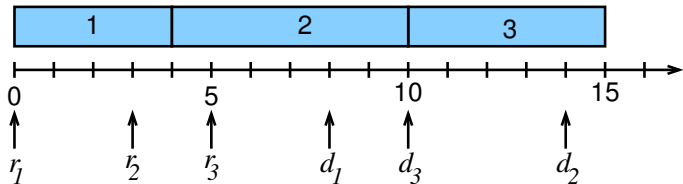
$$S' : (t + p_k)w_k + (t + p_k + p_j)w_j = tw_k + p_k w_k + tw_j + p_k w_j + p_j w_j$$

- $\sum w_j C_j$ pro $S' < \sum w_j C_j$ pro S spor s optimalitou S

- EDD optimální pro $1||L_{max}$
- Rozdílné termíny dostupnosti r_j , tj. problém $1|r_j|L_{max}$: NP-úplný problém
- Proč je tento problém tak obtížný?

Úlohy	1	2	3
p_j	4	6	5
r_j	0	3	5
d_j	8	14	10

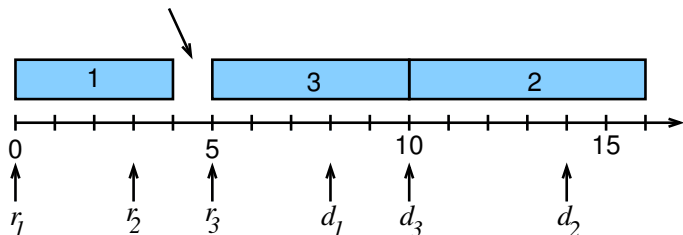
Rozvrh pomocí EDD:



$$\begin{aligned}
 L_{max} &= \max(L_1, L_2, L_3) = \\
 &= \max(C_1 - d_1, C_2 - d_2, C_3 - d_3) = \\
 &= \max(4 - 8, 10 - 14, 15 - 10) = \\
 &= \max(-4, -4, 5) = 5
 \end{aligned}$$

Existuje lepší řešení?

Pozdržíme provádění úloh:



$$\begin{aligned}L_{max} &= \max(L_1, L_2, L_3) = \\ &= \max(C_1 - d_1, C_2 - d_2, C_3 - d_3) = \\ &= \max(4 - 8, 16 - 14, 10 - 10) = \\ &= \max(-4, 2, 0) = 2\end{aligned}$$

Problém je obtížný, protože

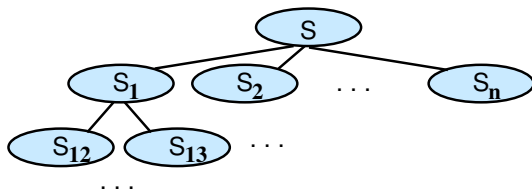
optimální rozvrh není nutně bez zdržení

- Preemptivní úlohy: je možné přerušit jejich provádění
- Preemptivní verze řídicích pravidel:
 - nečekáme až na dokončení prováděné úlohy pro výběr další úlohy k provádění
 - v každém časovém okamžiku je nutné zvážit, zda není k dispozici jiná prioritnější úloha (např. vzhledem k jejímu r_j)
 - pokud existuje prioritnější úloha, přerušíme aktuální úlohu a spustíme prioritnější úlohu
- Cvičení: aplikujte preemptivní EDD na předchozí příklad
- Preemptivní EDD pravidlo je optimální pro preemptivní verzi problému

$$1|r_j, prmp|L_{max}$$

- Preemptivní EDD je optimální pro předchozí příklad

- Prohledávací prostor se rychle zvětšuje se zvětšujícím počtem proměnných
- **Metoda větví a mezí** (*Branch & Bound search, BB*)
 - založena na myšlence postupného dělení prohledávacího prostoru

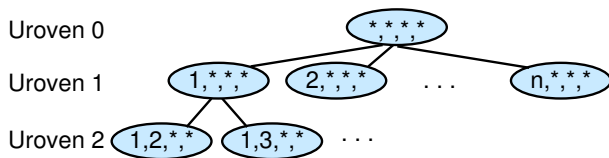


$$S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n \quad S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_n = \emptyset$$

- potřebujeme spočítat hranici/mez na cenu řešení
- části stavového prostoru, které dávají řešení horší než tato mez nemusíme prohledávat

- Typický způsob, jak zjistit hranice je relaxovat (zjednodušit) původní problém (např. odstraněním některých požadavků) na snadno řešitelný problém
 - jestliže neexistuje řešení pro relaxovaný problém, pak neexistuje řešení pro původní problém (větev lze smazat)
 - jestliže je optimální řešení relaxovaného problému zároveň řešením původního problému, pak je pro něj také optimální
 - jestliže optimální řešení není řešením původního problému, pak dává hranici na jeho řešení (původní problém nebude mít zcela jistě lepší řešení)

Pravidla větvení pro $1|r_j|L_{max}$



- Rozvrh je konstruován od času $t = 0$

- **Úroveň 1:**

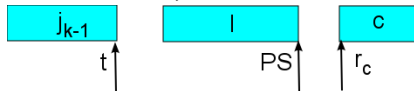
n větví, ve kterých je každá z n úloh rozvrhována první

- **Úroveň $k - 1$:**

úlohy j_1, \dots, j_{k-1} jsou rozvrhovány v pořadí $1, \dots, k - 1$

- Úlohu c uvažujeme **na úrovni k** (a odpovídající větvení) pokud:

$$r_c < \min_{l \in J} (\max(t, r_l) + p_l) = PS$$

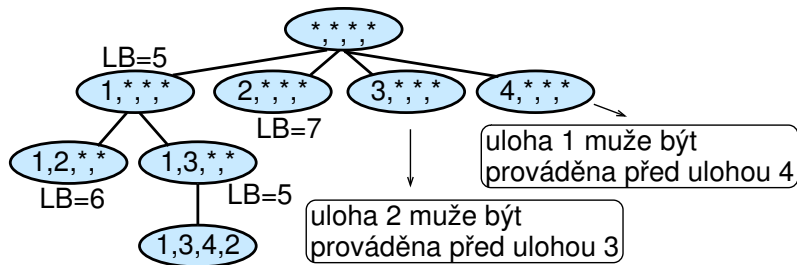


- J množina dosud nerozvržených úloh
- t čas, kdy je skončena j_{k-1} a lze rozvrhovat další úlohu
- pokud je $r_c \geq PS$, pak je třeba rozvrhovat úlohu minimalizující PS na pozici k a úlohu c na pozici $k + 1$ (nebo i později)
(toto uspořádání úloh stejně vůbec neovlivní čas dokončení c)

- Relaxace problému $1|r_j|L_{max}$ je problém $1|r_j, prmp|L_{max}$
 - neumožnění přerušení je omezení pouze v původním problému $1|r_j|L_{max}$
 - Preemptivní EDD pravidlo je optimální pro $1|r_j, prmp|L_{max}$
- ⇒ Preemptivní rozvrh (rozvrh bez zdržení) určitě nebude mít L_{max} větší než ne-preemptivní rozvrh (rozvrh potenciálně se zdržením)
- ⇒ Dolní hranice na úrovni $k - 1$ může být založena na rozvrhu zbývajících úloh podle preemptivního EDD pravidla
- + Jestliže preemptivní EDD dává nepreemptivní rozvrh, pak můžeme všechny uzly s větší dolní hranicí zrušit

Příklad: BB pro $1|r_j|L_{max}$

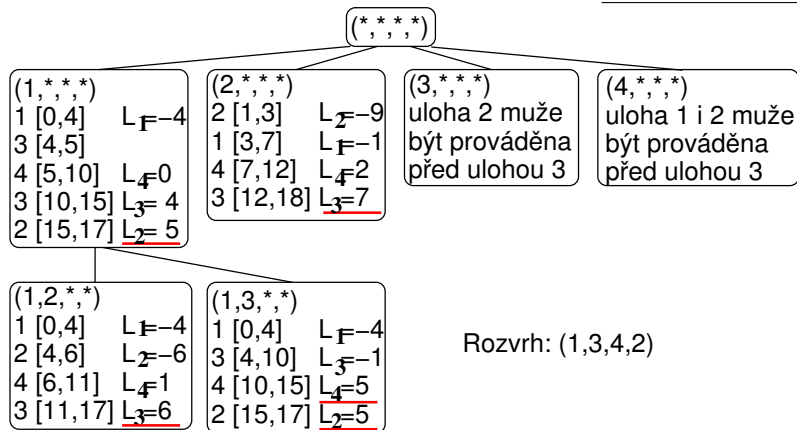
Úlohy	1	2	3	4
p_j	4	2	6	5
r_j	0	1	3	5
d_j	8	12	11	10



1,4,*,* nemá smysl prozkoumávat,
protože už v 1,3,*,* máme šanci na řešení s minimální LB=5

Příklad: dolní hranice BB pro $1|r_j|L_{max}$

Úlohy	1	2	3	4
p_j	4	2	6	5
r_j	0	1	3	5
d_j	8	12	11	10

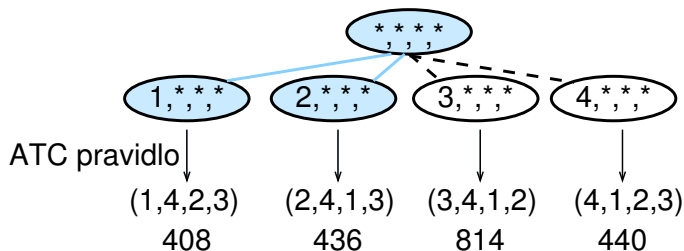


- Metoda větví a mezí
 - uvažuje každý uzel
 - pro n úloh:
 - na první úrovni n uzlů, na druhé úrovni $n(n - 1)$ uzlů,
na třetí úrovni $n(n - 1)(n - 2)$ uzlů, ...
 - ⇒ $n!$ uzlů na n -té úrovni
 - garantuje optimum
 - obvykle příliš pomalá
- **Paprskové prohledávání (*Beam Search, BS*)**
 - uvažuje pouze slibné uzly
 - **šířka paprsku (*beam width*)**
 - udává, u kolika uzlů budeme na každé úrovni pokračovat v prohledávání
 - negarantuje optimální řešení
 - mnohem rychlejší

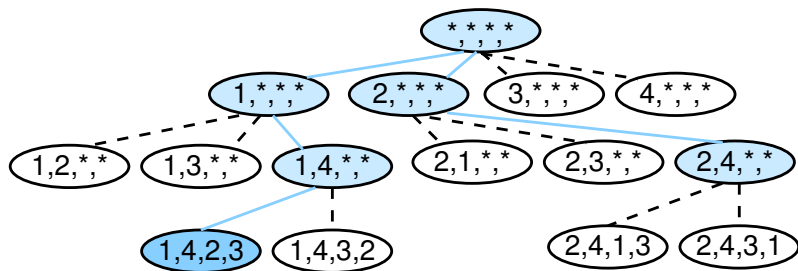
Kriterium: $1 || \sum_j w_j T_j$

Úlohy	1	2	3	4
p_j	10	10	13	4
r_j	4	2	1	12
d_j	14	12	1	12

Šířka paprsku 2:



Paprskové prohledávání



- Kompromisy při implementaci:
 - podrobná evaluace uzlů (kvůli přesnosti)
 - odhad evaluace uzlu (kvůli rychlosti)
- Dvoufázová procedura
 - **odhad evaluace**
 - je prováděn pro všechny uzly na úrovni k
 - **podrobná evaluace**
 - **šířka filtru** $>$ šířka paprsku
 - prováděna pro počet uzlů odpovídající šířce filtru

Plánování job-shopu

13. května 2021

- 24 Disjunktivní grafová reprezentace
- 25 Matematické programování a job shop
- 26 Metoda větví a mezí pro job shop
- 27 Posunování kritického místa (*shifting bottleneck*)

Multi-operační rozvrhování: job shop s minimalizací makespan

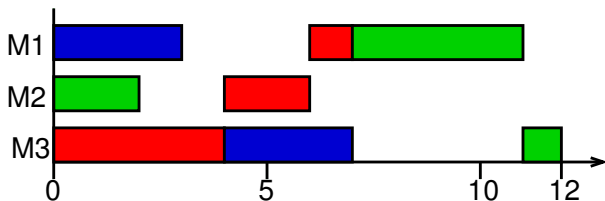
- n úloh
- m strojů
- operace (i, j) : provádění úlohy j na stroji i
- Pořadí operací úlohy je stanoveno:
 - $(i, j) \rightarrow (k, j)$ specifikuje, že úloha j má být prováděna na stroji i dříve než na stroji k
- p_{ij} : trvání operace (i, j)
- Cíl: rozvrhovat úlohy na strojích
 - bez překrytí na strojích
 - bez překrytí v rámci úlohy
 - minimalizace *makespan* C_{max}

Příklad: *job shop* problém

Data:

- stroje: $M1, M2, M3$
- úlohy: $J1 : (3, 1) \rightarrow (2, 1) \rightarrow (1, 1)$
 $J2 : (1, 2) \rightarrow (3, 2)$
 $J3 : (2, 3) \rightarrow (1, 3) \rightarrow (3, 3)$
- doby trvání: $p_{31} = 4, p_{21} = 2, p_{11} = 1$
 $p_{12} = 3, p_{32} = 3$
 $p_{23} = 2, p_{13} = 4, p_{33} = 1$

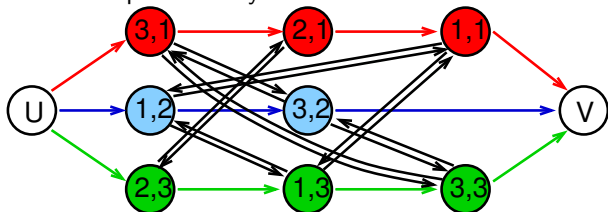
Řešení:



Disjunktivní grafová reprezentace

Graf $G = (N, A \cup B \cup P)$

- uzly odpovídají operacím $N = \{(i, j) | (i, j) \text{ je operace}\} \cup \{U, V\}$
- dva pomocné uzly U a V reprezentující zdroj a stok
- **konjunktivní hrany** A reprezentují pořadí operací úlohy
 - $(i, j) \rightarrow (k, j) \in A \iff$ operace (i, j) předchází (k, j)
- **disjunktivní hrany** B reprezentují konflikty na strojích
 - dvě operace (i, j) a (i, l) jsou spojeny dvěma opačně orientovanými hranami
- **pomocné hrany** P
 - hrany z U ke všem prvním operacím úlohy
 - hrany ze všech posledních operací úlohy do V



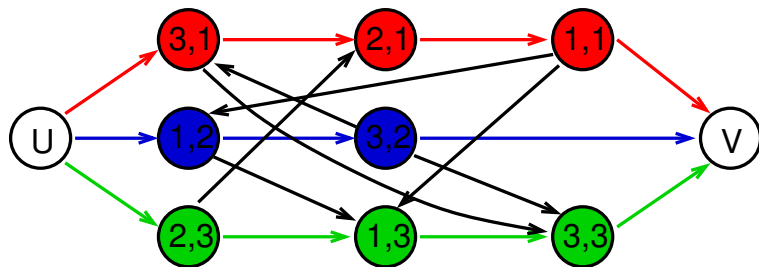
Pojmy:

- Podmnožina $D \subset B$ je nazývána **výběr**, jestliže obsahuje z každého páru disjunktivních hran právě jednu
- Výběr D je **splnitelný**, jestliže výsledný orientovaný graf $G(D) = (N, A \cup D \cup P)$ je acyklický
 - jedná se o graf s pomocnými, konjunktivními hranami a vybranými disjunktivními hranami

Poznámky:

- splnitelný výběr určuje posloupnost, ve které jsou operace prováděny na strojích
- vztah splnitelného výběru a (konzistentního) rozvrhu?
každý (konzistentní) rozvrh jednoznačně určuje splnitelný výběr
každý splnitelný výběr jednoznačně určuje (konzistentní) rozvrh

Příklad: nesplnitelný výběr



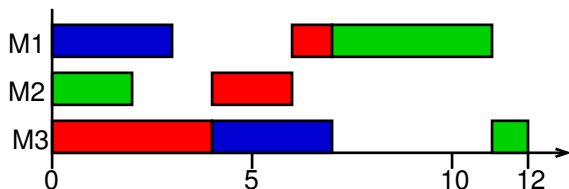
V grafu existuje v důsledku nevhodného výběru hran cyklus:

- $(1, 2) \rightarrow (3, 2)$
- $(3, 2) \rightarrow (3, 1) \rightarrow (2, 1) \rightarrow (1, 1) \rightarrow (1, 2)$

\Rightarrow nelze splnit (k tomuto výběru neexistuje rozvrh)

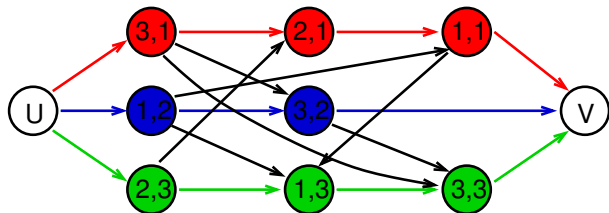
Příklad: výběr pro daný rozvrh

Nalezněte (splnitelný) výběr hran pro daný rozvrh:



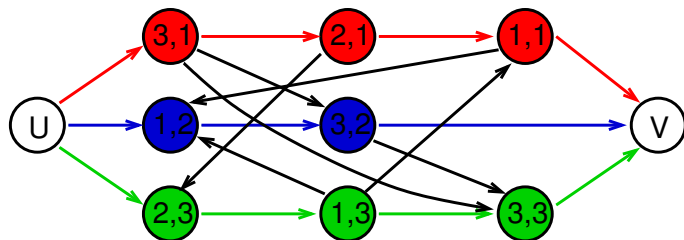
Konstrukce odpovídajícího výběru:

vybereme (jeden stroj po druhém) disjunktivní hrany, které odpovídají uspořádání operací na stroji v daném rozvrhu:

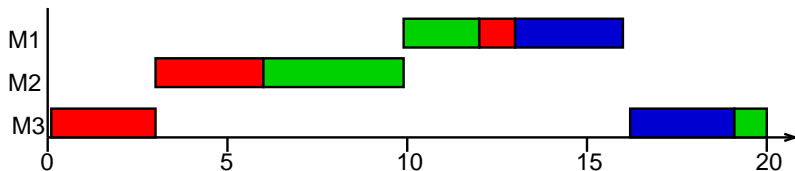


Příklad: rozvrh pro daný splnitelný výběr

Jakým způsobem nalézt rozvrh pro daný splnitelný výběr?



Tedy: jakým způsobem lze nalézt tento odpovídající rozvrh:



Výpočet rozvrhu pro výběr

Metoda: výpočet **nejdelších cest** z U do dalších uzlů v $G(D)$
obdoba dopředného zpracování z metody kritické cesty
pro plánování projektu

Technický popis:

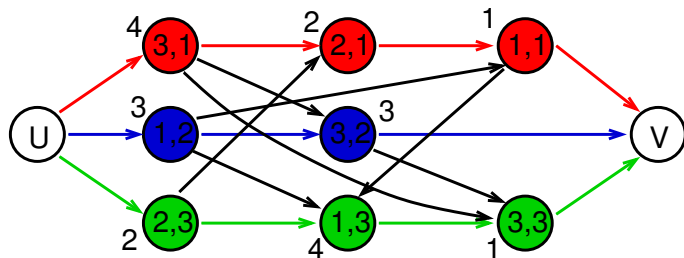
- uzly (i, j) mají **ohodnocení** p_{ij} , uzel U má váhu 0
- **délka cesty** i_1, i_2, \dots, i_r je součet ohodnocení uzlů i_1, i_2, \dots, i_{r-1}
- spočítej délku l_{ij} nejdelší cesty z U do (i, j) a V
 - 1 $l_U = 0$ a pro každý uzel (i, j) s jediným předchůdcem U : $l_{ij} = 0$
 - 2 vypočítej postupně pro všechny zbývající uzly (i, j) (a pro uzel V):

$$l_{ij} = \max_{\forall (k,l):(k,l) \rightarrow (i,j)} (l_{kl} + p_{kl})$$

tj. projdeme všechny předchůdce (k, l) uzlu (i, j)
délka cesty do (i, j) přes (k, l) je $l_{kl} + p_{kl}$

- zahaj operaci (i, j) v čase l_{ij}
- délka nejdelší cesty z U do V je rovna *makespan*
 - tato cesta je kritická cesta

Výpočet rozvrhu pro výběr



Výpočet l_{ij} :

uzel	(3,1)	(1,2)	(2,3)	(2,1)	(3,2)	(1,1)	(1,3)	(3,3)	V
délka	0	0	0	4	4	6	7	11	12

- Formulace disjunktivního programování
 - nejčastěji používaná formulace matematického programování pro *job shop* bez recirkulace
(bez recirkulace: úlohy prováděny na stroji nejvýše jednou)
 - vychází z disjunktivní grafové reprezentace
- **Disjunktivní programování**
 - jedná se o matematické programování
 - omezení rozděleny do množin **konjunktivních omezení**
 - všechna tato omezení musí být splněna
 - standardní matematické programování: všechna omezení konjunktivní
 - a jedné nebo více množin **disjunktivních omezení**
 - z každé množiny disjunktivních omezení musí být alespoň jedno omezení splněno

Disjunktivní programování a *job shop*

y_{ij} značí startovní čas operace (i, j) úlohy j na stroji i

Minimalizace C_{max}

za předpokladu

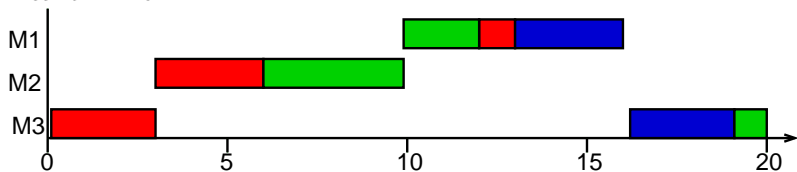
$$\begin{array}{ll} y_{kj} - y_{ij} \geq p_{ij} & \forall (i, j) \rightarrow (k, j) \in A \\ C_{max} - y_{ij} \geq p_{ij} & \forall (i, j) \in N \\ y_{ij} - y_{il} \geq p_{il} \text{ nebo } y_{il} - y_{ij} \geq p_{ij} & \forall (i, l), (i, j) : \\ & i = 1 \dots m \\ y_{ij} \geq 0 & \forall (i, j) \in N \end{array}$$

- Tato formulace ale nezajišťuje existenci standardní řešící procedury
- Problém velmi obtížný
- Ukážeme další přístupy: **enumerační procedury (BB)**,
heuristiky (posunování kritického místa)

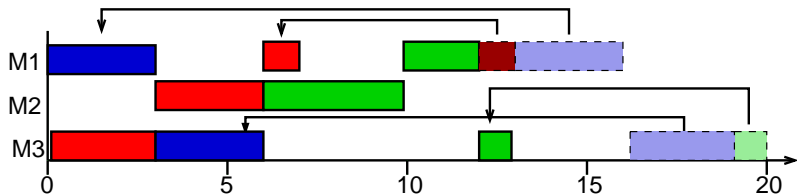
- Rozvrh je **bez zdržení** (*nondelay*), pokud žádný stroj nečeká, když existuje dostupná operace
- Rozvrh je **aktivní**, pokud nemůže být žádná operace rozvrhována dříve změnou posloupnosti úloh na stroji bez zdržení jiné operace
 - redukce *makespan* aktivního rozvrhu je možná pouze zvýšením startovního času alespoň jedné operace
 - optimální rozvrh je aktivní rozvrh

Příklad: aktivní vs. neaktivní rozvrh

Neaktivní rozvrh:



Aktivní rozvrh:



- Víme: optimální rozvrh je aktivní rozvrh
- Metoda řešení
 - generování množiny aktivních rozvrhů
 - výběr nejlepšího rozvrhu
- Zlepšení
 - použití metody větví a mezí při generování
- Důsledek
 - potřebujeme algoritmus pro generování všech aktivních rozvrhů
- Značení
 - Ω : množina všech operací, jejichž předchůdci už jsou narozvrhováni
 - r_{ij} : nejdřívější startovní čas operace $(i, j) \in \Omega$
 - může být spočítáno pomocí výpočtu nejdelsí cesty
 - Ω' : podmnožina Ω

1 Inicializace

- $\Omega := \{\text{první operace každé úlohy}\}$
- $r_{ij} := 0$ pro všechna $(i, j) \in \Omega$

2 Výběr stroje

- spočítej pro současný částečný rozvrh

$$t(\Omega) := \min_{(i,j) \in \Omega} \{r_{ij} + p_{ij}\}$$

tj. kdy nejdříve může nějaká úloha z Ω skončit

- $i^* :=$ stroj, na němž bylo dosaženo minima

3 Větvení

- $\Omega' := \{(i^*, j) \mid r_{i^*j} < t(\Omega)\}$
- pro všechna $(i^*, j) \in \Omega'$
 - přidej do rozvrhu (i^*, j) jako další operaci na stroji i^*
 - smaž (i^*, j) z Ω
 - přidej následníky úlohy (i^*, j) do Ω
 - běž na krok 2

Příklad: generování aktivních rozvrhů

- Úlohy: $J1 : (3, 1) \rightarrow (2, 1) \rightarrow (1, 1)$
 $J2 : (1, 2) \rightarrow (3, 2)$
 $J3 : (2, 3) \rightarrow (1, 3) \rightarrow (3, 3)$

- Částečný rozvrh:

- neřešíme od začátku,
začneme řešit už s tímto rozvrhem,
aby byl postup demonstrativní

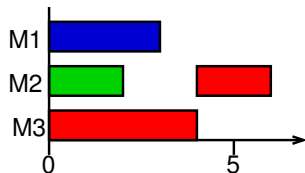
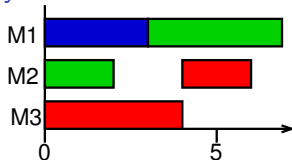
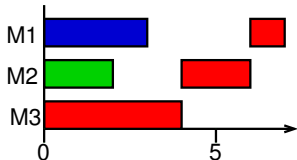
- $\Omega = \{(1, 1), (3, 2), (1, 3)\}$

- $p_{11} = 1, p_{32} = 3, p_{13} = 4$ $r_{11} = 6, r_{32} = 4, r_{13} = 3$

- $t(\Omega) = \min(6 + 1, 4 + 3, 3 + 4) = 7$ např. $i^* = M1$

- $\Omega' = \{(1, 1), (1, 3)\}$

- Rozšířené částečné rozvrhy:



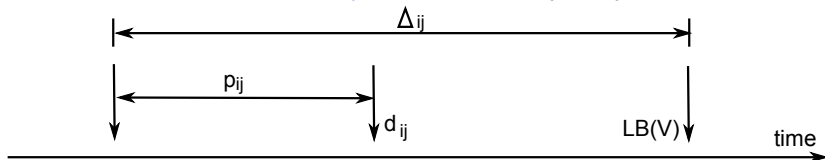
- Větvení algoritmu volí disjunkce
- Předpokládejme větvení $\Omega' = \{(i^*, j), (i^*, l)\}$
 - výběr (i^*, j) při větvení
 - přidání disjunkce $(i^*, j) \rightarrow (i^*, k)$ pro všechny dosud nenarozvrhované operace (i^*, k)
 - výběr (i^*, l) při větvení
 - přidání disjunkce $(i^*, l) \rightarrow (i^*, k)$ pro všechny dosud nenarozvrhované operace (i^*, k)
- Důsledek:
 - každý uzel stromu je charakterizován množinou D' vybraných disjunkcí

Předpokládejme uzel V s vybranými disjunkcemi D'

- **Jednoduchá dolní hranice**
 - spočítej kritickou cestu v $G(D')$
dolní hranice $LB(V)$
- **Vylepšená dolní hranice**
 - uvažuj stroj i
 - povolíme překrývání operací na všech strojích kromě i
 - vyřeš problém na stroji i

Podproblém: $1|r_j|L_{max}$

- Vypočítej **nejdřívejší startovní čas** r_{ij} všech operací (i, j) na stroji i
 - nejdelší cesta ze zdroje v $G(D')$
- Vypočítej minimální množství času Δ_{ij} mezi:
startem operace (i, j) (tj. r_{ij}) a
koncem rozvrhu (nejdelší cesta v $G(D')$ z uzlu do stoku)
- Získáme **termíny dokončení** $d_{ij} = LB(V) - \Delta_{ij} + p_{ij}$



- Vyřeš výsledný problém: $1|r_j|L_{max}$
 - viz dříve

- Vyřeš $1|r_j|L_{max}$ pro všechny stroje
- Výsledek: L_1, \dots, L_m

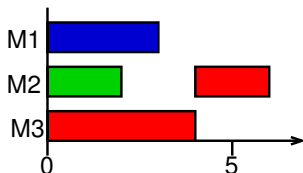
$$LB^{new}(V) = LB(V) + \max_{i=1\dots m} L_i$$

tj. výsledné řešení nemůže mít lepší kvalitu než nejlepší možné řešení pro každý stroj zvlášť, a proto zahrneme do dolní hranice nejhorší (největší) spočítané zpoždění

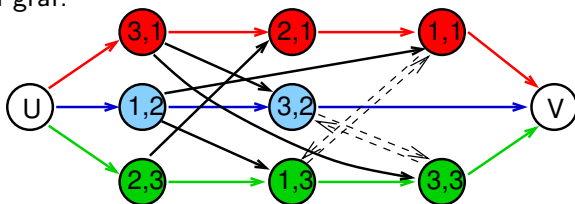
- Poznámky:
 - $1|r_j|L_{max}$ je NP-úplný problém
 - experimentální výsledky přesto ukazují, že se vyplatí řešit m NP-úplných problémů pro každý uzel stromu
 - 20×20 instance jsou už obtížně řešitelné metodou větví a mezí

Příklad: dolní hranice

Částečný rozvrh:



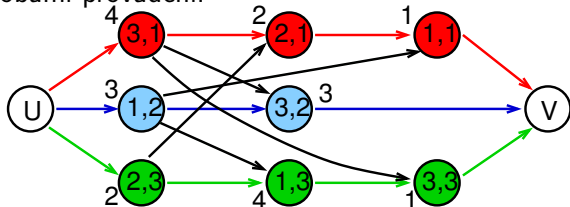
Odpovídající graf:



- \dashrightarrow pár disjunktivních dosud nevybraných hran
- \rightarrow vybrané disjunktivní hrany
- \rightarrow konjunktivní hrany
- \rightarrow hrany $G(D')$

Příklad: dolní hranice

Graf $G(D')$ s dobami provádění:

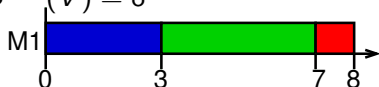


$$LB(V) = l(U, (1,2), (1,3), (3,3), V) = 8$$

	modrá	zelená	červená
Data pro úlohy na stroji $M1$:	$r_{12} = 0$	$r_{13} = 3$	$r_{11} = 6$
	$\Delta_{12} = 8$	$\Delta_{13} = 5$	$\Delta_{11} = 1$
	$d_{12} = 3$	$d_{13} = 7$	$d_{11} = 8$

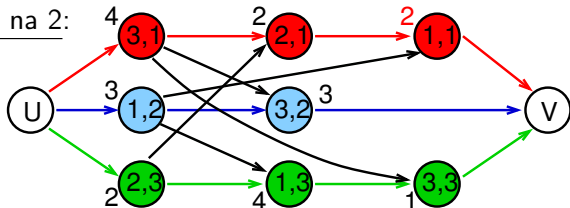
(víme: $d_{ij} = LB(V) - \Delta_{ij} + p_{ij}$)

Optimální řešení: $L_{max} = 0, LB^{new}(V) = 8$



Příklad: dolní hranice

Změna p_{11} z 1 na 2:



$$LB(V) = l(U, (1, 2), (1, 3), (3, 3), V) \\ = l(U, (3, 1), (2, 1), (1, 1), V) = 8$$

	modrá	zelená	červená
Data pro úlohy na stroji M1:	$r_{12} = 0$	$r_{13} = 3$	$r_{11} = 6$
	$\Delta_{12} = 8$	$\Delta_{13} = 5$	$\Delta_{11} = \underline{2}$
	$d_{12} = 3$	$d_{13} = 7$	$d_{11} = 8$

Optimální řešení: $L_{max} = 1, LB^{new}(V) = 9$



Posunování kritického místa (*shifting bottleneck*)

- Úspěšná heuristika
při řešení problému minimalizace *makespan* pro *job shop*
- Základní popis
 - **iterativní heuristika**
 - v každé iteraci je určen rozvrh pro jeden další stroj
 - používána re-optimalizace pro změnu už narozvrhovaných strojů
- **Rozšiřitelnost:** metoda lze rozšířit na obecnější *job shop* problémy
 - další objektivní funkce
 - *flexible flow shop*
(paralelní stroj místo samostatných strojů)
 - nastavovací doba stroje

- Značení
 - M je množina všech strojů
- Dáno
 - určen rozvrh pro podmnožinu $M_0 \subset M$ strojů
 - tj. je určen výběr disjunktivních hran
- Akce při jedné iteraci
 - 1 výběr stroje k , pro který ještě neexistuje rozvrh
 - tj. stroj z $M \setminus M_0$
 - 2 určení rozvrhu (výběru disjunktivních hran) pro stroj k na základě daných (zafixovaných) rozvrhů pro stroje z M_0
 - 3 nové rozvrhování (= přepřelánování) strojů z M_0 na základě ostatních daných (zafixovaných) rozvrhů

- Myšlenka:
 - výběr ještě nerozvrženého stroje, který působí nejvíce problémů, tzv. **kritický (*bottleneck*) stroj**
- Realizace:
 - spočítej pro každou operaci na nenarozvrhovaném stroji
 - nejdřívější možný startovní čas a
 - minimální zdržení mezi koncem operace a koncem úplného rozvrhu založeného na
 - zafixovaných rozvrzích strojů v M_0 a
 - pořadí úloh
 - spočítej pro každý nenarozvrhovaný stroj rozvrh respektující tyto nejdřívější termíny dostupnosti a zdržení
 - vyber stroj s maximálním koncovým časem a zafixuj rozvrh na tomto stroji

- Myšlenka:
 - snaha redukovat *makespan* rozvrhu pro stroje v M_0
 - Popis:
 - uvažuj stroje z M_0 jeden po druhém
 - smaž rozvrh vybraného stroje a spočítej nový rozvrh na základě
 - nejdřívějšího startovního času a
 - zdržení
- vyplývající z
- ostatních strojů v M_0 a
 - pořadí úloh

Modelování a reprezentace

- disjunktivní grafová reprezentace
- matematické programování a job shop (+ řešení)

Řešení

- metoda větví a mezí pro job shop
- heuristika: posunování kritického místa

Rozvrhování montážních systémů

13. května 2021

- 28 Montážní linka s flexibilním časem
- 29 Montážní linka s fixním časem

Job shop

- každá úloha má jednoznačnou identitu
- výroba na objednávku, malý objem výroby
- potenciálně komplikovaná cesta systémem

- velmi obtížný problém

Montážní linka (flexible assembly system)

- limitovaný počet odlišných **typů výrobků**
- specifikováno vyráběné **množství každého typu**
- **systém pro manipulaci s materiálem**
 - startovní čas úlohy je funkcí času dokončení na předchozím stroji
 - limitovaný počet úloh čekajících ve frontě mezi stroji
- masová produkce
- ještě obtížnější problém

Montážní linka s flexibilním časem (*unpaced assembly system*)

- Několik strojů zapojených sériově (*flow system*)
- **Flexibilní čas**
 - stroj může strávit tolik času na úloze, kolik je třeba
- **Blokování**
 - následující stroj je plný a úloha na něj nemůže být přesunuta
- Fronty mezi stroji?
 - bez újmy na obecnosti lze uvažovat fronty nulové délky
 - frontu délky n lze simulovat n stroji, na kterých je doba provádění úlohy nulová
 - ⇒ budeme uvažovat fronty nulové délky
- Limitovaný počet odlišných typů výrobků
- Specifikováno vyráběné množství každého typu
- Cíl: maximalizace výkonu
 - výkon opět definován kritickým strojem

- Různé typy kopírek montované na jedné lince
- Odlišné modely mají obvykle společný základ
- Odlišnost v rámci komponent
 - automatický podavač ano/ne, rozdílné optiky, ...
- Odlišnost typů vede k odlišným dobám výroby na jednotlivých strojích

- Rozvrhy jsou často **cyklické** nebo periodické
 - daná množina úloh rozvrhována v určitém pořadí
 - jsou obsaženy všechny typy výrobků
 - některé typy zde mohou být vícekrát
 - druhá identická množina rozvrhována, atd.
- Nevhodné pokud jsou dlouhé nastavovací doby
 - pak se vyplatí dlouhé běhy výrobku jednoho typu
- Praktické pokud **nevýznamná nastavovací doba**
 - nízké skladovací náklady
 - snadné na implementaci
 - nicméně: acyklický rozvrh může dávat maximální výkon
- V praxi
 - cyklické rozvrhy s malými odchylkami závislémi na aktuálních objednávkách

Minimální podílová množina (*minimum part set*)

- Předpokládejme l typů výrobků
- N_k požadovaný počet výrobků typu k
- z největší společný dělitel
- Potom

$$N^* = \left(\frac{N_1}{z}, \dots, \frac{N_l}{z} \right)$$

je nejmenší množina se „správnými“ proporcemi

minimální podílová množina
(MPS, *minimum part set*)

- Uvažujme úlohy v MPS jako n úloh: $n = \frac{1}{z} \sum_{k=1}^l N_k$
 - p_{ij} jako dříve
 - cyklický rozvrh je rozvrh určen seřazením úloh v MPS
 - maximalizace výkonu = minimalizace doby cyklu

- Systém se 4 stroji
- Tři odlišné typy výrobku, které musí být vyráběny ve stejném množství, tj.

$$N^* = (1, 1, 1)$$

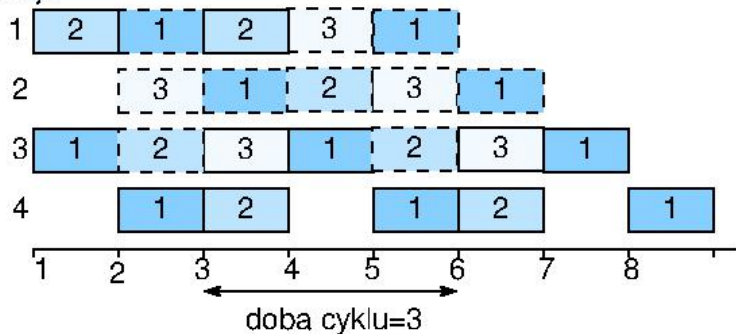
- Doby provádění

Úlohy	1	2	3	
p_{1j}	0	1	0	
p_{2j}	0	0	0	← fronta mezi strojem 1 a 3
p_{3j}	1	0	1	
p_{4j}	1	1	0	

Příklad: posloupnost v MPS 1,2,3

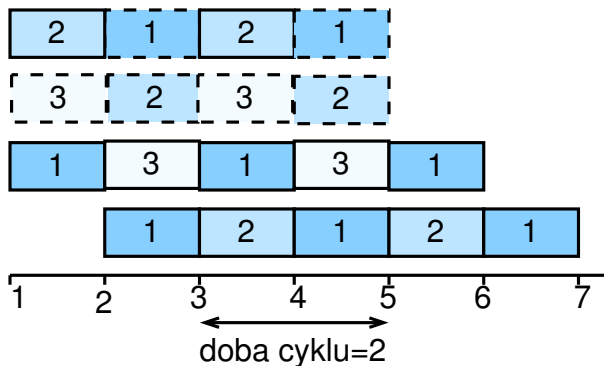
Úlohy	1	2	3
p_{1j}	0	1	0
p_{2j}	0	0	0
p_{3j}	1	0	1
p_{4j}	1	1	0

stroje



Příklad: posloupnost v MPS 1,3,2

Úlohy	1	2	3
p_{1j}	0	1	0
p_{2j}	0	0	0
p_{3j}	1	0	1
p_{4j}	1	1	0



Heuristika padnacího profilu (*profile fitting heuristic, PF*)

- Vyber první úlohu j_1
 - výběr libovolné úlohy nebo
 - výběr úlohy s nejdelší celkovou dobou provádění
- Úloha generuje **profil**

$$X_{i,j_1} = \sum_{h=1}^i p_{h,j_1}$$

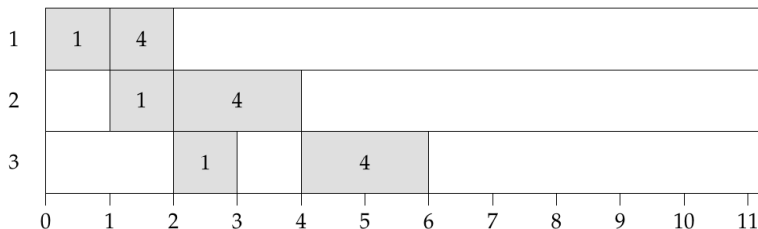
- předpokládáme, že úloha j_1 poběží bez blokování
- ⇒ X_{i,j_1} **čas odchodu**: čas, kdy úloha j_1 opustí stroj i

PF: určení následující úlohy

Spočítej pro každou možnou úlohu

- dobu, kterou stroje čekají
- dobu, kdy je úloha blokována
- spočítej čas odchodu pro kandidáta na druhou pozici (j_2), např. pro úlohu c

$$\begin{aligned}X_{1,j_2} &= \max(X_{1,j_1} + p_{1c}, X_{2,j_1}) \\X_{i,j_2} &= \max(X_{i-1,j_2} + p_{ic}, X_{i+1,j_1}) \quad i = 2, \dots, m-1 \\X_{m,j_2} &= X_{m-1,j_2} + p_{mc}\end{aligned}$$



PF: určení následující úlohy

Spočítej pro každou možnou úlohu

- dobu, kterou stroje čekají
- dobu, kdy je úloha blokována
- spočítej čas odchodu pro kandidáta na druhou pozici (j_2), např. pro úlohu c

$$\begin{aligned}X_{1,j_2} &= \max(X_{1,j_1} + p_{1c}, X_{2,j_1}) \\X_{i,j_2} &= \max(X_{i-1,j_2} + p_{ic}, X_{i+1,j_1}) \quad i = 2, \dots, m-1 \\X_{m,j_2} &= X_{m-1,j_2} + p_{mc}\end{aligned}$$

- neproduktivní doba na stroji i , pokud je c na druhé pozici: $X_{i,j_2} - X_{i,j_1} - p_{ic}$
- celková neproduktivní doba (přes všechny stroje) pro c :

$$\sum_{i=1}^m (X_{i,j_2} - X_{i,j_1} - p_{ic})$$

- úloha s nejmenší neproduktivní dobou vybrána na druhou pozici (pro další pozice opakuj totéž) ... myšlenka padnoucího profilu

- PF heuristika se chová v praxi dobře
 - stále platí, že při použití heuristiky PF nehrají roli nastavovací doby
- Zjemnění:
 - neproduktivní doby nejsou stejně špatné na všech strojích
 - uvažuj kritický stroj
 - použití vah v součtu

- Popis modelu

- transportér, který se posunuje konstantní rychlostí
- výrobky, které se vyrábí se **posunují mezi stroji pevnou rychlostí**
- **jednotková doba cyklu:**
 - určena jako doba mezi dvěma po sobě jdoucími úlohami na lince
- každý stroj má danou kapacitu a omezení
- cíl: uspořádat úlohy tak, aby
 - nebyly stroje přetíženy a
 - byla minimalizována cena za nastavení

- Příklad: výroba automobilu

- rozdílné modely vyráběné na stejné lince
- auta mají odlišné barvy a vybavení
- vyráběná auta uspořádána tak, aby byla
 - minimalizována cena za nastavení a
 - stroje na lince byly rovnoměrně vytíženy

- **Atributy a charakteristiky každé úlohy**
 - barva, vybavení, . . .
- Cena za změny při výrobě
 - vytváření **skupin výrobků**, které mají vybrané atributy stejné
 - např. barva auta
- Časově náročné operace
 - **distribuuji úlohy**, které obsahují tyto operace
 - **operace omezující kapacitu (index kritičnosti)**
 - operace s vyšším indexem jsou kritičtější
 - např. instalace posuvné střechy
 - př. čtyřikrát časově náročnější, 10% aut má posuvnou střechu, tj. index kritičnosti = 4/10
 - sekce linky pro instalaci posuvné střechy musí být vytížena alespoň čtyřikrát méně než sekce pro automobily bez posuvné střechy, jinak nebude dostatek času na instalaci posuvné střechy

- Minimalizace celkové ceny na nastavení
- Splnění termínů dokončení pro výrobky na objednávku
 - celkové nezáporné vážené zpoždění
 - opakování: $T_j = \max(C_j - d_j, 0)$
- Distribuce operací omezujících kapacitu
 - $\psi_i(l)$ značí penalizaci, pokud stroj musí vyrábět dva výrobky, které jsou l pozic od sebe
- Pravidelné tempo spotřeby materiálu

Heuristika seskupování a distribuce (*grouping and spacing*)

- 1 Urči celkový počet úloh, které mají být rozvrhovány
 - vyšší počet úloh na rozvrhování umožní nižší cenu, ale snadněji dojde k narušení rozvrhu
 - typicky jeden den až týden
- 2 Seskup úlohy obsahující operace s vysokými cenami za nastavení
- 3 Uspořádej skupiny podle nastavovacích cen a termínů objednávky
- 4 Distribuuj úlohy v rámci skupiny tak, aby byly brány v úvahu operace omezující kapacitu
 - nejkritičtější operace distribuovány co nejlépe co nejdříve a zohledni přitom termíny objednávky

Jednoduchý matematický model

- 1 stroj, n úloh
- Každá úloha: $p_j = 1$, d_j (mohou být nekonečné), w_j , b atributů a_{j1}, \dots, a_{jb}
 - 1. atribut reprezentuje barvu
 - 2. atribut je 1, pokud má úloha posuvnou střechu, jinak je 0
 - ...
- Jestliže úloha j následována úlohou k a $a_{j1} \neq a_{k1}$, pak je nutná cena na nastavení c_{jk}
 - c_{jk} je funkcí a_{j1} a a_{k1}
- Jestliže $a_{j2} = a_{k2} = 1$, pak je nutná penalizace $\psi_2(l)$
 - pokud jsou úlohy j a k od sebe vzdáleny l pozic
- Jestliže je úloha dokončena po termínu dokončení, uvažujeme vážené nezáporné zpoždění
- Cíl: minimalizovat celkovou cenu včetně
 - ceny za nastavení
 - ceny za distribuci
 - ceny za zpoždění

Příklad: heuristika seskupování a distribuce (zadání)

- 1 stroj, 10 úloh, $p_j = 1$
- Atributy úlohy j : a_{j1} a a_{j2}
- Cena za nastavení s využitím a_{j1} pro úlohu j :
 - dvě po sobě jdoucí úlohy mají $a_{j1} \neq a_{k1}$, pak $c_{jk} = |a_{j1} - a_{k1}|$
- $a_{j2} = a_{k2} = 1$ a mezi j a k je $(l - 1)$ úloh, pak $\psi_2(l) = \max(3 - l, 0)$
 - úlohy těsně po sobě ($0 = l - 1$), pak je penalizace $\max(3 - 1, 0) = 2$
 - jedna úloha mezi nimi ($1 = l - 1$), pak je penalizace $\max(3 - 2, 0) = 1$
 - více než jedna úloha mezi nimi (s), pak je penalizace $\max(3 - s, 0) = 0$
- Některé úlohy mají konečné termíny dokončení, pokud překročeny, pak $w_j T_j$ brána v úvahu

Úlohy	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_{j1}	1	1	1	3	3	3	5	5	5	5
a_{j2}	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0
d_j	∞	2	∞	∞	∞	∞	6	∞	∞	∞
w_j	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0

Příklad: heuristika seskupování a distribuce (řešení)

- 3 skupiny dle a_{j1}
- Skupina A: úlohy 1,2,3 skupina B: úlohy 4,5,6
skupina C: úlohy 7,8,9,10
- Nejlepší pořadí skupin
vzhledem k ceně za nastavení A, B, C nebo C, B, A
- Ale úloha 7 nebo 2 by nebyla dokončena včas a cena za zpoždění vysoká \Rightarrow výběr pořadí A, C, B
- Úlohy s atributem 2 nutno distribuovat, optimální posloupnosti minimalizující penalizaci ψ_2
 - A: 2,1,3 atributy 1 0 1
 - C: 8,7,9,10 atributy 0 1 0 0
 - B: 5,4,6 atributy 1 0 1
 - cena 3 (první-třetí=1, třetí-pátý=1, osmý-desátý=1)
- Celková cena: $6+3+0=9$
(cena za nastavení+cena za distribuci+cena za zpoždění)

Montážní linka s flexibilním časem

- př. výroba kopírek
- cyklické rozvrhy
- heuristika padnouceho profilu PF

Montážní linka s fixním časem

- př. výroba automobilů
- heuristika seskupování a distribuce

Rezervace

13. května 2021

- 30 Úvod
- 31 Intervalové rozvrhování
- 32 Rezervační systém s rezervou

- m strojů zapojených paralelně
- n úloh s
 - dobou provádění p_1, \dots, p_n
 - termíny dostupnosti r_1, \dots, r_n
 - termíny dokončení d_1, \dots, d_n
 - váhy w_1, \dots, w_n
- Úloha musí být prováděna v rámci daného časového intervalu
 - termín dostupnosti a dokončení nelze porušit
- Nemusí být možné realizovat všechny úlohy
- Cíl: vyber podmnožinu úloh,
 - pro kterou existuje konzistentní rozvrh
 - která maximalizuje danou objektivní funkci
 - maximalizace počtu prováděných úloh
 - maximalizace celkového množství provádění
 - maximalizace profitu realizovaných úloh (zadané váhy)

- **System bez rezervy**

- úlohy trvají od termínu dostupnosti do termínu dokončení, tj.

$$p_j = d_j - r_j$$

- mluvíme o **pevných intervalech** nebo o **intervalovém rozvrhování**

- **Systemy s rezervou**

- interval mezi termínem dostupnosti a dokončení může mít nějakou rezervu, tj. $p_j \leq d_j - r_j$

- Pronájem aut

- čtyři typy aut: subcompact, střední velikost, plná velikost, sportovní typ
- pevné množství každého typu
- stroj = typ auta
- úloha = zákazník požadující auto
- zákazník může požadovat určitý(é) typ(y) auta
 - úloha může být prováděna na podmnožině strojů
- v případě nedostatku některého typu auta může být nabídnut v některých případech silnější typ auta

- Rezervace pokojů v hotelu

- Rezervace strojů v továrně

- m strojů zapojených paralelně
- n úloh, pro úlohu j zadán
 - termín dostupnosti r_j
 - termín dokončení d_j
 - doba provádění $p_j = d_j - r_j$
 - množina M_j strojů, na kterých může být úloha j prováděna
 - w_{ij} : profit z provádění úlohy j na stroji i
- Cíl: maximalizovat profit z prováděných úloh
 - $w_{ij} = 1$: maximalizovat počet realizovaných úloh
 - $w_{ij} = w_j$: maximalizovat vážený počet realizovaných úloh

Formulace celočíselného programování

- Časové periody $1, \dots, H$
- J_l : množina úloh, která potřebuje provádění v čase l (známe předem!)
- $x_{ij} = 1$ pokud je úloha j prováděna na stroji i
 $x_{ij} = 0$ jinak
- Maximalizace

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n w_{ij} x_{ij}$$

za předpokladu:

úloha běží nejvýše na jednom stroji

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \leq 1 \quad j = 1, \dots, n$$

v každém čase běží na každém stroji nejvýše jedna úloha

$$\sum_{j \in J_l} x_{ij} \leq 1 \quad i = 1, \dots, m \quad l = 1, \dots, H$$

provádění úlohy j na stroji i : $x_{ij} \in \{0, 1\}$

- Každá úloha je dostupná přesně 1 časovou jednotku
- Co z toho plyne? Problém lze rozdělit na nezávislé problémy
 - víme přesně, které úlohy i jsou prováděny v každé časové jednotce
 - jeden podproblém pro každou časovou jednotku
- Výsledný problém pro časovou jednotku l :

Maximalizace

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n w_{ij} x_{ij}$$

za předpokladu

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \leq 1 \quad j = 1, \dots, n$$

$$\sum_{j \in J_l} x_{ij} \leq 1 \quad i = 1, \dots, m$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}$$

- Jedná se o **problém přiřazení** (*assignment problem*)
 - problém řešitelný v polynomiálním čase

Jednotková váha & identické stroje

- $w_{ij} = 1$; $M_j = \{1, \dots, m\}$ pro všechna i, j ; obecná p_j

- tedy stroje jsou identické a
cíl je maximalizovat počet realizovaných úloh
- nejednotková p_j , nelze tedy řešit rozkladem v čase

- **Algoritmus** dávající optimální řešení

Předpokládejme: $r_1 \leq \dots \leq r_n$

$J = \emptyset$ (J je množina už vybraných úloh pro provádění)

for $j = 1$ to n do

if existuje stroj dostupný v čase r_j then

přiřaď j tomuto stroji

$J := J \cup \{j\}$

else určí úlohu j^* takovou, že $C_{j^*} = \max_{k \in J} C_k = \max_{k \in J} (r_k + p_k)$

if $C_j = r_j + p_j > C_{j^*}$ then

nezařazuj j do J

else přiřaď j stroji j^*

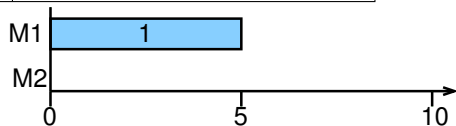
$J := J \cup \{j\} \setminus \{j^*\}$

Příklad: jednotková váha & identické stroje

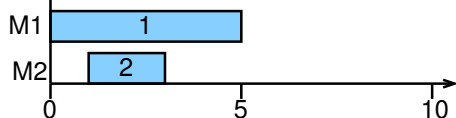
2 stroje a 8 úloh:

j	1	2	3	4	5	6	7	8
r_j	0	1	1	3	4	5	6	6
d_j	5	3	4	7	6	7	9	8

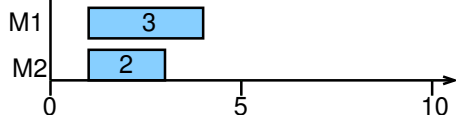
Iterace 1: $j = 1$



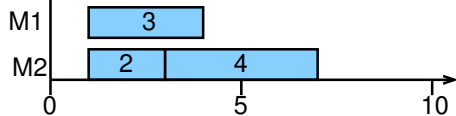
Iterace 2: $j = 2$



Iterace 3: $j = 3, j^* = 1$



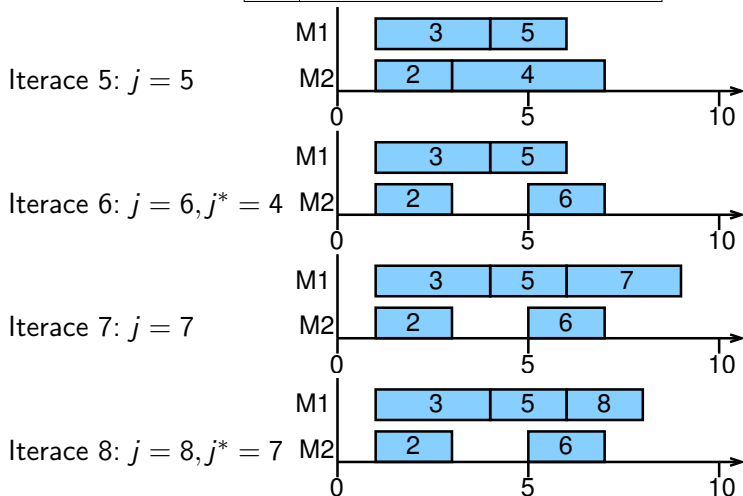
Iterace 4: $j = 4$



Příklad: jednotková váha & identické stroje

2 stroje a 8 úloh:

j	1	2	3	4	5	6	7	8
r_j	0	1	1	3	4	5	6	6
d_j	5	3	4	7	6	7	9	8

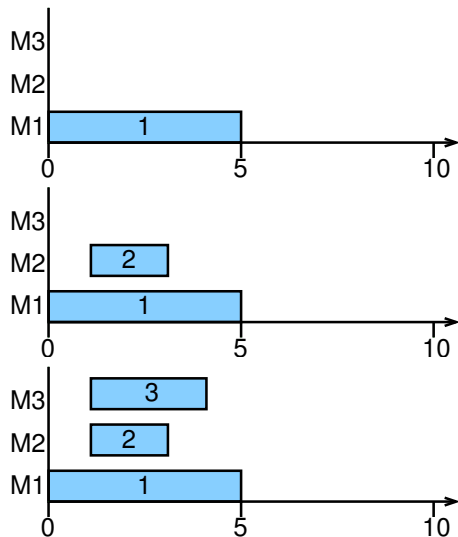


Jednotková váha a nelimitovaný počet identických strojů

- $w_{ij} = 1$ pro všechna i, j
- Všechny úlohy musí být realizovány
- Cíl: použít minimální počet strojů
- Algoritmus dávající optimální řešení

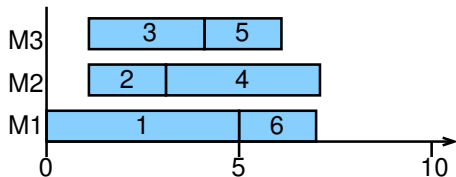
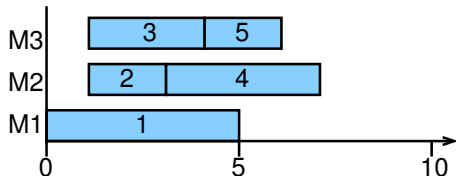
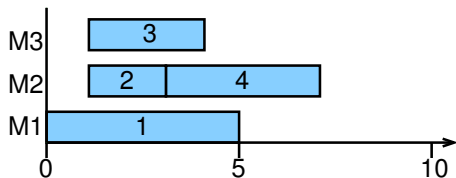
Předpokladejme: $r_1 \leq \dots \leq r_n$
 $M = \emptyset$ (M množina použitých strojů)
 $i := 0$
for $j = 1$ to n do
 if stroj z M je volný v r_j
 then
 přiřaď j na volný stroj
 else
 $i := i + 1$
 $M := M \cup \{i\}$
 přiřaď úlohu j na stroj i

Příklad: jednotková váha a nelimitovaný počet identických strojů



j	1	2	3	4	5	6	7	8
r_j	0	1	1	3	4	5	6	6
d_j	5	3	4	7	6	7	9	8

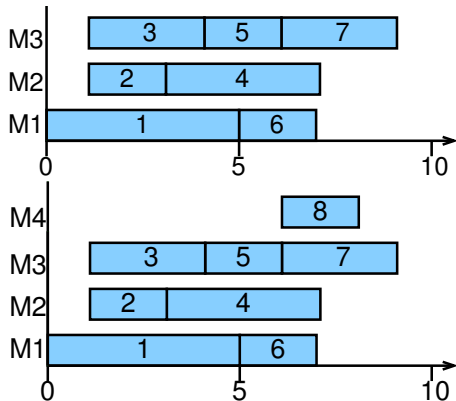
Příklad: jednotková váha a nelimitovaný počet identických strojů



j	1	2	3	4	5	6	7	8
r_j	0	1	1	3	4	5	6	6
d_j	5	3	4	7	6	7	9	8

Příklad: jednotková váha a nelimitovaný počet identických strojů

j	1	2	3	4	5	6	7	8
r_j	0	1	1	3	4	5	6	6
d_j	5	3	4	7	6	7	9	8



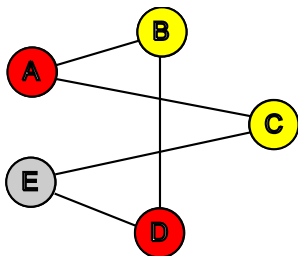
Problém barvení grafu

- Je možné obarvit vrcholy grafu s použitím n barev tak, aby žádné dva sousední vrcholy nebyly obarveny stejnou barvou?

Chromatické číslo grafu

- Minimální počet barev n nutný k obarvení grafu tak, by žádné dva sousední vrcholy nebyly obarveny stejnou barvou.

NP-úplný problém



Reformulace na problém barvení grafu

Problém s jednotkovou vahou a nelimitovaným počtem identických strojů lze reformulovat na problém barvení grafu

- vrchol = úloha
- hrana (j, k) znamená, že se úlohy j a k překrývají v čase
- každá barva odpovídá jednomu stroji
- přiřaď barvu (tj. stroj) každému vrcholu tak, že dva sousední vrcholy (překrývají se v čase) mají různou barvu (tj. stroje)

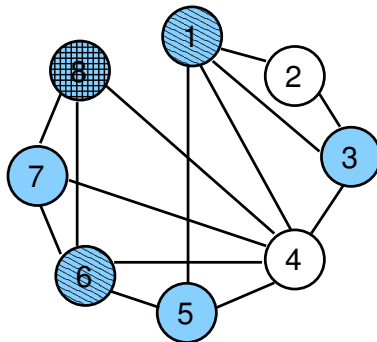
Poznámky:

- obecný problém existence obarvení grafu m barvami je NP-úplný
- uvažovaný rezervační problém je speciálním (jednodušším) případem problému barvení grafu
- heuristiky diskutovány v kapitole o *timetabling*

Příklad: reformulace

j	1	2	3	4	5	6	7	8
r_j	0	1	1	3	4	5	6	6
d_j	5	3	4	7	6	7	9	8

Odpovídající řešení problému barvení grafu:



- **Rezervační systém s rezervou:** $p_j \leq d_j - r_j$
- **Triviální případ**
 - doby provádění = 1, identické váhy, identické stroje
 - řešení opět dekompozicí v čase
- **Maximalizace váženého počtu aktivit**
 - NP-těžký problém \Rightarrow řešení heuristikami
 - kompozitní řídicí pravidlo
 - předzpracování:
určení flexibility úloh a strojů
 - algoritmus:
nejméně flexibilní úloha na nejméně flexibilním stroji první

- ψ_{it} : počet úloh, které mohou být přiřazeny na stroj i během intervalu $[t - 1, t]$
 - možné využití stroje i v čase t
 - čím vyšší hodnota, tím je zdroj i v tomto čase flexibilnější
- $|M_j|$: počet strojů, které mohou být přiřazeny úloze j
 - čím vyšší hodnota, tím je úloha j flexibilnější

- **Prioritní index pro úlohu j :** $l_j = f(w_j/p_j, |M_j|)$
 - uspořádání úloh podle: $l_1 \leq l_2 \leq \dots \leq l_n$
 - čím menší je $|M_j|$, tím nižší je l_j
 - čím vyšší je w_j/p_j , tím nižší je l_j
 - snažíme se dát přednost kratším úlohám, protože maximalizujeme počet vážených provedených aktivit a delší úlohy jsou náročnější
 - např. $l_j = \frac{|M_j|}{w_j/p_j}$
- **Prioritní index pro stroj**
 - vybírá stroj pro úlohu
 - jestliže úloha potřebuje stroj v $[t, t + p_j]$
pak výběr stroje i záleží na funkci s faktory $\psi_{i,t+1}, \dots, \psi_{i,t+p_j}$, tj. na $g(\psi_{i,t+1}, \dots, \psi_{i,t+p_j})$
 - např. $g(\psi_{i,t+1}, \dots, \psi_{i,t+p_j}) = \left(\sum_{l=1}^{p_j} \psi_{i,t+l} \right) / p_j$
nebo $g(\psi_{i,t+1}, \dots, \psi_{i,t+p_j}) = \max(\psi_{i,t+1}, \dots, \psi_{i,t+p_j})$

Algoritmus maximalizace váženého počtu aktivit

- 1 $j = 1$
- 2 Vyber úlohu j s nejnižším l_j a
vyber mezi stroji a dostupnými časy zdroj a čas s nejnižší
 $g(\psi_{i,t+1}, \dots, \psi_{i,t+p_j})$
Zruš úlohu j jestliže nemůže být přiřazena ani jednomu stroji
v žádném čase
- 3 Jestliže $j = n$ STOP
jinak nastav $j = j + 1$ a běž na krok 2

Cvičení: maximalizace váženého počtu aktivit

- Nalezněte rozvrh pro daný problém

Úlohy	1	2	3	4	5	6	7
p_j	3	10	9	4	6	5	3
w_j	2	3	3	2	1	2	3
r_j	5	0	2	3	2	4	5
d_j	12	10	20	15	18	19	14
M_j	{1, 3}	{1, 2}	{1, 2, 3}	{2, 3}	{1}	{1}	{1, 2}

- pro $l_j = \frac{|M_j|}{w_j/p_j}$ a

$$g(\psi_{i,t+1}, \dots, \psi_{i,t+p_j}) = (\sum_{l=1}^{p_j} \psi_{i,t+l}) / p_j$$

- Řešení:

Úlohy	7	6	1	4	5	2
Stroje	2	1	3	3	1	2
Časy	11-14	14-19	5-8	11-15	2-8	0-10

úlohu 3 nelze umístit

Rozvrhování jako timetabling

13. května 2021

- 33 Úvod
- 34 Rozvrhování s operátory
- 35 Rozvrhování s pracovní sílou

- Doposud: rozvrhování = *scheduling*
Nyní: rozvrhování = *timetabling*
 - důraz kladen na časové umístění objektů
 - vazby na časové uspořádání mezi objekty hrají malou roli
- Omezení operátorů/nástrojů (*operator/tool*)
 - mnoho operátorů
 - úloha potřebuje jeden nebo více odlišných operátorů
 - úlohy vyžadující stejné operátory nemohou běžet zároveň
 - možné cíle:
rozvržení všech úloh v rámci časového horizontu H
nebo minimalizace *makespan*
- Omezení pracovní síly
 - R identických pracovníků = jeden zdroj kapacity R
 - každá úloha potřebuje několik pracovníků
 - celkový počet pracovníků nesmí být nikdy překročen

Rozvrhování jako problém plánování projektu s omezenými zdroji

- Problém plánování projektu s omezenými zdroji
resource-constrained project scheduling problem (RCPSP)
 - n úloh
 - N zdrojů
 - R_i kapacita zdroje i
 - p_j doba provádění úlohy j
 - R_{ij} požadavek úlohy j na zdroj i
 - $Prec_j$ (přímí) předchůdci úlohy j
- Rozvrhování s operátory
 - $R_i = 1$ pro všechna $i = 1 \dots N$
- Rozvrhování s pracovní silou
 - $N = 1$
- Oba problémy rozvrhování stále velmi obtížné
 - i při $p_j = 1$ NP-těžké
 - operátory \equiv barvení grafu
 - pracovní síla \equiv *bin-packing*

Rozvrhování s operátory jako barvení grafu

- Omezíme se na problém s jednotkovou dobou trvání
- Úloha = uzel
- Úlohy potřebují stejného operátora = hrana mezi uzly
- Přiřazení barev (= času) uzlům
 - sousední uzly musí mít různé barvy
tj. úlohy se stejným operátorem musí být prováděny v různých časech
- Problém existence řešení
 - tj. zadán časový horizont H a hledám rozvrh v rámci horizontu
 - může být graf obarven H barvami?
- Optimalizační problém
 - tj. minimalizace *makespan*
 - jaký nejmenší počet barev je třeba?
 - **chromatické číslo grafu**

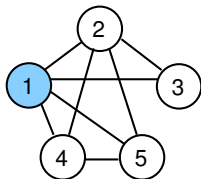
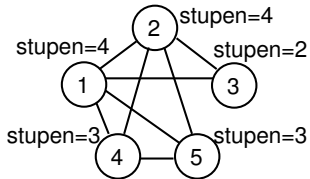
- **Stupeň uzlu**
 - počet hran spojených s uzlem
- **Úroveň saturace**
 - počet různých barev spojených s uzlem
- **Intuice**
 - obarvi uzly s vyšším stupněm dříve
 - obarvi uzly s vyšší úrovní saturace dříve
- **Algoritmus**
 - 1 uspořádej uzly v klesajícím pořadí podle jejich stupně
 - 2 použij barvu 1 pro první uzel
 - 3 vyber neobarvený uzel s maximální úrovní saturace
v případě volby z nich vyber uzel
s maximálním stupněm v neobarveném podgrafu
 - 4 obarvi vybraný uzel s nejmenší možnou barvou
 - 5 jestliže jsou všechny uzly obarveny STOP
jinak běž na krok 3

Příklad: rozvrhování schůzek

Vytvoř rozvrh pro 5 schůzek se 4 lidmi

- schůzka = úloha, člověk = operátor
- všechny schůzky trvají jednu hodinu

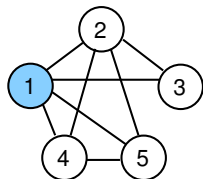
	1	2	3	4	5
Joe	1	1	0	1	1
Lisa	1	1	1	0	0
Jane	1	0	1	0	0
Larry	0	1	0	1	1



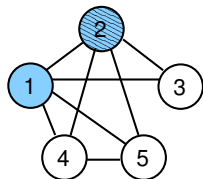
Můžeme vybrat buď úlohu 1 nebo úlohu 2

Např. vybereme 1 a obarvíme barvou 1

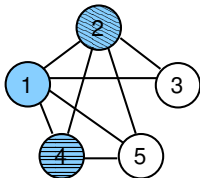
Příklad: rozvrhování schůzek (dokončení)



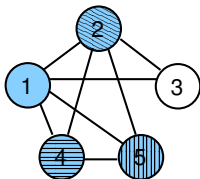
Úroveň saturace = 1 pro všechny úlohy
Vyber 2 vzhledem k nejvyššímu stupni



Úroveň saturace = 2 pro všechny uzly
Vyber 4 vzhledem k nejvyššímu stupni



Úroveň saturace = 2 pro uzel 3
Úroveň saturace = 3 pro uzel 5
Vyber 5 na obarvení



V posledním kroku obarvi 3
stejnou barvou jako 4
⇒ celkem 4 barvy, tj. *makespan*=4

Příklad: rezervace vs. rozvrhování s operátory

Předpokládejme, že máme rezervační systém

Úloha	1	2	3
p_j	2	3	1
r_j	0	2	3
d_j	2	5	4

Lze přeformulovat na rozvrhování s operátory

Úloha	1	2	3
Operátor 1	1	0	0
Operátor 2	1	0	0
Operátor 3	0	1	0
Operátor 4	0	1	1
Operátor 5	0	1	0

úloha 1 běží v čase [0,2]

úloha 2 běží v čase [2,5]

úloha 3 běží v čase [3,4]

- Rozvrhování s operátory **blízké rezervačnímu systému bez rezervy**
- Oba problémy reformulovány na **problém barvení grafu**
 - rezervace: hrana = dvě úlohy se překrývají v čase
 - rozvrhování: hrana = dvě úlohy požadují stejného operátora
- Rozdíl ve složitosti
 - rezervace: překrývající se časové jednotky jdou po sobě
 - rozvrhování: úlohy často nevyžadují pouze sousední operátory

⇒ rozvrhování s operátory je obtížnější problém

- Řízení projektu ve stavebním průmyslu
 - dodavatel má realizovat n aktivit
 - doba trvání aktivity j je p_j
 - aktivita j požaduje pracovní skupinu velikosti W_j
 - precedenční omezení na aktivity
 - dodavatel má W pracovníků
 - cíl: dokončit všechny aktivity v minimálním čase
- Rozvrhování zkoušek
 - všechny zkoušky mají stejnou dobu trvání
 - všechny zkoušky jsou v místnosti s W sedadly
 - počet studentů předmětu j , kteří skládají zkoušku, je W_j
 - několik zkoušek může být narozvrhováno ve stejné místnosti, pokud je postačující počet sedadel
 - cíl: zkonstruovat rozvrh tak, že jsou všechny zkoušky narozvrhovány v minimálním čase

- **Problém plnění košů**
 - každý koš má kapacitu W
 - předměty velikosti W_j
 - cíl: naplnit minimální počet košů
- Uvažujme speciální **problém rozvrhování s pracovní silou**
 - předpokládejme jednotkovou dobu trvání
 - nelimitovaný počet strojů
 - minimalizace *makespan*
- **Rozvrhování s pracovní silou jako problém plnění košů**
 - předmět = úloha (s počtem pracovníků W_j)
 - kapacita koše = celkový počet pracovníků W
 - 1 koš = 1 časová jednotka
 - minimalizace počtu košů = minimalizace *makespan*
- **Řešení problému plnění košů**
 - NP-těžký problém
 - vyvinuta řada heuristik
 - heuristika **prvního padnoucího** (*first fit FF*) koše
víme, že:

$$C_{\max}(FF) \leq \frac{17}{10} C_{\max}(OPT) + 2$$

Příklad: heuristika prvního padnouceho koše (FF)

- Předpokládejme 18 úloh a $W=2100$
 - úloha 1-6 požaduje 301 jednotek zdroje
 - úloha 7-12 požaduje 701 jednotek zdroje
 - úloha 13-18 požaduje 1051 jednotek zdroje
- FF heuristika:
 - přiřadíme prvních 6 úloh na jeden zdroj ($301 \times 6 = 1806$)
 - pak přiřadíme vždy dvě úlohy na další tři zdroje ($701 \times 2 = 1402$)
 - pak přiřadíme právě jednu úlohu na každý zdroj
- Velmi nekvalitní řešení vzhledem k uspořádání úloh

- Zlepšení FF heuristiky
- Uspořádání úloh od nejdelší k nejkratší
- První padnoucí koš se zmenšováním úloh (*first fit decreasing FFD*)
- Řešení příkladu:
 - seřadíme úlohy dle požadovaných jednotek zdroje, tj.
13,14,15,16,17,18,7,8,9,10,11,12,1,2,3,4,5,6
 - úlohy bereme postupně a dáváme je na první zdroj, kam se vejdou
13 dáme na zdroj 1, 14 dáme na zdroj 2, ..., 18 dáme na zdroj 6
7 dáme na zdroj 1, 8 dáme na zdroj 2, ..., 12 dáme na zdroj 6
1 dáme na zdroj 1, 2 dáme na zdroj 2, ..., 6 dáme na zdroj 6

- Víme, že

$$C_{max}(FFD) \leq \frac{11}{9} C_{max}(OPT) + 4$$

- FF i FFD mohou být rozšířeny
 - o různé termíny dostupnosti

- Uvažovali jsme reprezentanty různých problémů
- V praxi
 - obecnější problémy (kombinace všech uvažovaných rysů problémů zároveň)
 - dynamické rezervační problémy
 - uvažování ceny (management zisku)
 - přerušení aktivit
 - ...

Rezervace

- Intervalové rozvrhování (rezervační systém bez rezervy)
 - celočíselné programování
 - jednotková doba trvání: formulace problému přiřazení (řešení pro každou čas. jednotku zvlášť)
 - jednotková váha & identické stroje (maximalizace počtu provedených aktivit)
 - jednotková váha & nelimitovaný počet identických strojů
- Rezervační systém s rezervou
 - kompozitní řídicí pravidlo

Timetabling

- plánování projektu s omezenými zdroji (RCPSp)
- rozvrhování s operátory a barvení grafu
 - heuristika pro barvení grafu
- rozvrhování s pracovní silou a problém plnění košů
 - heuristika prvního padnouceho koše
 - heuristika prvního padnouceho koše se zmenšováním úloh

Rozvrhování zaměstnanců

13. května 2021

- 36 Rozvrhování volných dnů
- 37 Rozvrhování směn
- 38 Cyklické rozvrhování směn

Reálný problém: rozvrhování sester v nemocnici

Klasický **problém rozvrhování zaměstnanců**

Požadavky na personál

- odlišný počet sester v pracovní dny a o víkendu
- menší nároky při obsazování nočních směn
- dodržení pravidel daných ze zákona
- preference zaměstnanců na pracovní dobu
- ...

Cíl

- určit přiřazení sester na směny
- splnění požadavků
- minimalizace ceny

	1				2				3				4															
2000 December	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
	M	T	W	T	F	S	S	M	T	W	T	F	S	S	M	T	W	T	F	S	S	M	T	W	T	F	S	S
A	DH	DH	DH	DH	DH	DH	DH	DH	DH	DH	DH	DH	DH	DH	DH	DH	DH	DH	DH	DH	DH	DH	DH	DH	DH	DH	DH	DH
B																												
C																												
D																												
E																												
F																												
G																												
H																												

- Jedná se o problém přípravy pracovních rozvrhů a přiřazení zaměstnanců na směny tak, aby byly pokryty požadavky na počty zaměstnanců, které se v průběhu času liší
- Aplikace
 - rozvrhování zdravotních sester v nemocnici
 - rozvrhování telefonních operátorů
 - rozvrhování policejních zaměstnanců
 - rozvrhování v dopravě (posádky letadel, řidiči autobusů)
 - ...
- Uvažované problémy
 - rozvrhování volných dnů (základní problém)
 - rozvrhování směn (obecný problém)
 - cyklické rozvrhování směn (speciální případ)

Nalezněte minimální počet zaměstnanců R , kteří jsou požadováni na pokrytí 7-denního týdne tak, že platí

- stanoven požadavek na každý pracovní den $n_j, j = 1 \dots 7$
 - n_1 je neděle, n_7 je sobota
- každý zaměstnanec má k_1 volných víkendů z každých k_2 víkendů
- každý zaměstnanec pracuje přesně 5 ze 7 dnů od neděle do soboty
- každý zaměstnanec pracuje nejvýše 6 po sobě jdoucích dnů

- **Omezení víkendu**

- z k_2 víkendů každý zaměstnanec pracuje $k_2 - k_1$ víkendů
- $n = \max(n_1, n_7)$
- $(k_2 - k_1)R \geq k_2 n$, tj.

$$R \geq \left\lceil \frac{k_2 n}{k_2 - k_1} \right\rceil$$

- **Omezení celkového požadavku**

- $5R \geq \sum_{j=1}^7 n_j$, tj.

$$R \geq \left\lceil \frac{1}{5} \sum_{j=1}^7 n_j \right\rceil$$

- **Maximální denní požadavek**

$$R \geq \max(n_1, \dots, n_7)$$

Algoritmus a příklad (krok 1)

Den	1	2	3	4	5	6	7
	Ne	Po	Út	St	Čt	Pá	So
Zaměstnanců	3	5	5	5	7	7	3

Zaměstnanec požaduje volné 3 víkendy z 5: $k_1 = 3, k_2 = 5$

1 Spočítej **minimální počet zaměstnanců**

R je rovno maximu ze tří omezení dolní hranice

$$\bullet R \geq \left\lceil \frac{5 \cdot 3}{5 - 3} \right\rceil = 8$$

$$\bullet R \geq \left\lceil \frac{3 + 5 + 5 + 5 + 7 + 7 + 3}{5} \right\rceil = 7$$

$$\bullet R \geq \max(3, 5, 5, 5, 5, 7, 7, 3) = 7$$

$$\Rightarrow R = 8, n = 3$$

Algoritmus a příklad (krok 2)

2 Rozvrhuj volné víkendy

- 1 přiřaď do prvního volného víkendu prvních $(R - n)$ zaměstnanců
- 2 přiřaď do druhého volného víkendu dalších $(R - n)$ zaměstnanců
- 3 opakuj tento proces cyklicky
 - zaměstnanec 1 je brán jako následující zaměstnanec po zaměstnanci R

$$R - n = 8 - 3 = 5$$

	So	Ne	Po	Út	St	Čt	Pá	So	Ne	Po	Út	St	Čt	Pá	So	Ne	Po	Út	St	Čt	Pá	So
1	X	X						X	X													X
2	X	X						X	X													X
3	X	X													X	X						X
4	X	X													X	X						X
5	X	X													X	X						
6								X	X						X	X						
7								X	X						X	X						
8								X	X													X

3 Urči dodatečné páry volných dnů

- celkový počet volných dnů: $2R$ (každý má dva dny v týdnu volné)
 - $(R - n)$ volných sobot a $(R - n)$ volných nedělí je už určeno ($2R - 2n$)
- ⇒ $2n$ volných dnů musí být přiřazeno

- S_j přebytek zaměstnanců v j -tém dni

$$S_j = R - n_j \quad \text{pro } j = 2, \dots, 6$$

(od pondělí do pátku zatím všech R zaměstnanců pracuje)

$$S_1 = n - n_1 \quad S_7 = n - n_7$$

($R - n$ zaměstnanců má každý víkend zatím volno, tj. n zam. pracuje)

- $$\sum_{j=1}^7 S_j = \sum_{j=2}^6 (R - n_j) + n - n_1 + n - n_7 =$$
$$= 5R - \sum_{j=1}^7 n_j + 2n \geq 2n$$

z omezení celkového požadavku $5R - \sum_{j=1}^7 n_j \geq 0$

Algoritmus a příklad (krok 3)

Iterativně konstruuji seznam n párů volných dnů:

- 1 vyber den k takový, že $S_k = \max(S_1, \dots, S_7)$
- 2 vyber libovolný $i \neq k$ takový, že $S_i > 0$
jestliže $S_i = 0$ pro všechna $i \neq k$, nastav $i = k$
- 3 přidej pár (k, i) do seznamu a sniž S_i a S_k o 1

Opakuj tento postup n -krát

- páry stejných volných dnů (k, k) mohou být na konci seznamu

Příklad:

Den	Ne	Po	Út	St	Čt	Pá	So
S_j	0	3	3	3	1	1	0
		2	2				
			1	2			
			0	1			

seznam párů volných dnů ($n = 3$): $(Po, Út)$, $(Út, St)$, $(Út, St)$

Algoritmus (krok 4)

4 Přřazení párů volných dnů v týdnu 1

1 rozděl zaměstnance do kategorií ($i = 1$)

Kategorie	Víkend i	Týden i	Víkend $i + 1$
T1	volný	nejsou třeba volné dny	volný
T2	volný	1 volný den potřeba	zaměstnaný
T3	zaměstnaný	1 volný den potřeba	volný
T4	zaměstnaný	2 volné dny potřeba	zaměstnaný

$$|T3| + |T4| = n \text{ (plyne z víkendu } i)$$

$$|T2| + |T4| = n \text{ (plyne z víkendu } i + 1)$$

$$\Rightarrow |T2| = |T3| \quad \text{přřaduj T2 a T3}$$

2 přřad' páry volných dnů

nejprve přřad' páry volných dnů T4 zaměstnancům

přřad' T3 a T2: T3 je dřřivějš' den páru, T2 je pozdějš'

5 Přřazení párů volných dnů v týdnu i

- 1 rozděľ zaměstnance do kategorií
- 2 přiřad' páry volných dnů
 - 1 pokud existuje pár stejných prvků (k, k)
 - týden i je rozvrhován stejně jako týden 1, nezávisle na týdnu $(i - 1)$
 - 2 pokud jsou všechny páry různé
 - všichni zaměstnanci typu T3 a T4 v týdnu i jsou přiřazeni stejnému páru volných dnů, který dostali od týdne $(i - 1)$
 - T4 má oba dny volné
 - T3 dostane dřívější den z určeného páru
 - a na T2 zůstanou pozdější dny z páru

Příklad (krok 4+5)

Kategorie	Víkend i	Týden i	Víkend $i + 1$
T1	volný	nejsou třeba volné dny	volný
T2	volný	1 volný den potřeba	zaměstnaný
T3	zaměstnaný	1 volný den potřeba	volný
T4	zaměstnaný	2 volné dny potřeba	zaměstnaný

Seznam párů volných dnů ($n = 3$): A:(Po,Út), B:(Út,St), C:(Út,St)

	So		Ne	Po	Út	St	Čt	Pá	So		Ne	Po	Út	St	Čt	Pá	So	Ne
1	X	T1	X						X	T2	X	A						
2	X	T1	X						X	T2	X		B					
3	X	T2	X	A						T3		A				X	X	
4	X	T2	X		B					T3			B			X	X	
5	X	T2	X		C					T3			C			X	X	
6		T3		A				X		T1	X					X	X	
7		T3			B			X		T1	X					X	X	
8		T3			C			X		T2	X		C					

Příklad II. (pár stejných volných dnů)

Den	1	2	3	4	5	6	7
	Ne	Po	Út	St	Čt	Pá	So
Zaměstnanců	1	0	3	3	3	3	2

Zaměstnanci požadují 1 volný víkend ze 3

$$\bullet R \geq \left\lceil \frac{3 \cdot 2}{3 - 1} \right\rceil = 3$$

$$R \geq \left\lceil \frac{k_2 n}{k_2 - k_1} \right\rceil$$

$$\bullet R \geq \left\lceil \frac{1 + 0 + 3 + 3 + 3 + 3 + 2}{5} \right\rceil = 3$$

$$R \geq \left\lceil \frac{1}{5} \sum_{j=1}^7 n_j \right\rceil$$

$$\bullet R \geq \max(1, 0, 3, 3, 3, 3, 2) = 3$$

$$R \geq \max(n_1, \dots, n_7)$$

$$\Rightarrow R = 3, n = 2$$

Příklad II. (dokončení)

$R - n = 3 - 2 = 1$ víkendů volných

	So	Ne	Po	Út	St	Čt	Pá	So	Ne	Po	Út	St	Čt	Pá	So	Ne
1	X	X														
2							X	X								
3														X	X	

Den	Ne	Po	Út	St	Čt	Pá	So
S_j	1	3	0	0	0	0	0
	0	2					
		1					
		0					

Seznam párů volných dnů ($n = 2$): A:(Ne,Po), B:(Po,Po)

	So		Ne	Po	Út	St	Čt	Pá	So		Ne	Po	Út	St	Čt	Pá	So		Ne	Po
1	X	T2	X	B						T4	A	A						T3		B
2		T3		B				X		T2	X	B						T4	A	A
3		T4	A	A						T3		B					X	T2	X	B

- Každý zaměstnanec má alespoň k_1 víkendů z k_2 víkendů volných
- Každý zaměstnanec pracuje přesně 5 dnů v týdnu od neděle do soboty
- Žádný zaměstnanec nepracuje více než 5 po sobě jdoucích dnů, pokud jsou všechny páry volných dnů různé
- Lze také ukázat, že žádný zaměstnanec nepracuje více než 6 po sobě jdoucích dnů, když jsou některé páry volných dnů stejné
- Algoritmus dává dolní hranici na počet zaměstnanců
- Algoritmus přiřazuje volné dny, než aby se snažil splnit minimální denní požadavky

- Řešili jsme **problém rozvrhování volných dnů**
 - různé vzorky jsou přiřazovány v rámci cyklu
 - cena přiřazení zaměstnance ke vzorku není závislá na vzorku
 - vzorky mají stejnou cenu \Rightarrow řešení problému relativně snadné
 - cíl: minimalizace celkového počtu zaměstnanců
- **Směna:** množina period, kdy zaměstnanec pracuje
 - často je směna chápána jako množina po sobě jdoucích period
 - př. denní směna 6:00-18:00, noční směna 18:00-6:00
- **Problém rozvrhování směn**
 - cyklus je dán předem
 - např. 1 den je cyklus, časová jednotka (perioda) je hodina
 - je dáno několik vzorků směn s odlišnou cenou
 - cíl je minimalizovat celkovou cenu

- m period (hodin)
 - např. od 10:00 do 21:00
- V periodě $i, i = 1, \dots, m$ je potřeba b_i zaměstnanců
 - např. 10:00: 3, 11:00: 4, 12:00 6, ...
- n vzorků směn
 - např. 10:00–18:00, 13:00–21:00, ...
- Každý zaměstnanec přiřazen právě jednomu vzorku
- Vzorek směny j je vektor $(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})$
 - $a_{ij} = 1$: i je pracovní perioda
 - $a_{ij} = 0$: jinak
- Cena přiřazení zaměstnance na směnu j : c_j
- x_j : proměnná reprezentující počet zaměstnanců přiřazených ke směně j
- Cíl: minimalizace celkové ceny přiřazených zaměstnanců

Model celočíselného lineárního programování

Minimalizace $c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$

za předpokladu

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &\geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &\geq b_2 \\ &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &\geq b_m \\ x_j &\geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

kde x_1, \dots, x_n jsou celá čísla

V maticovém zápisu: minimalizace $\bar{c}\bar{x}$

$$\begin{aligned} \text{za předpokladu } \mathbb{A}\bar{x} &\geq \bar{b} \\ \bar{x} &\geq 0 \end{aligned}$$

Problém je NP-těžký, nicméně

- \mathbb{A} má často speciální tvar
- např. směna je dána jako **kontinuální posloupnost 1**
- platí: řešení tohoto lineárního programu je vždy celočíselné

Příklad: rozvrhování směn v obchodě (kontinuální posloupnost 1)

- Obchod otevřen od 10:00 do 21:00
- 5 vzorků (typů) směny

Vzorek	Doba	Hodin	Cena
1	10-18	8	50
2	13-21	8	60
3	12-18	6	30
4	10-13	3	15
5	18-21	3	16

- Požadavky na počet zaměstnanců v obchodě

Hodina	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Počet zaměstnanců	3	4	6	4	7	8	7	6	4	7	8

- Lineární relaxace

$$\bar{c} = (50, 60, 30, 15, 16)$$

$$A =$$

1	0	0	1	0
1	0	0	1	0
1	0	1	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	0	0
1	1	1	0	0
1	1	1	0	0
0	1	0	0	1
0	1	0	0	1
0	1	0	0	1

$$\bar{b} =$$

3
4
6
4
7
8
7
6
4
7
8

- Řešení $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$
 $= (0, 0, 8, 4, 8)$

- *Cyclic Staffing Problem*
- Další problém rozvrhování směn, který je polynomiálně řešitelný
- Cíl: minimalizace ceny přiřazení zaměstnanců do m period za předpokladu
 - dostatečné množství zaměstnanců každou periodu i vzhledem k b_i
 - každý zaměstnanec pracuje k po sobě jdoucích period a je volný následujících $m - k$ period
 - (k, m) problém
- Poznámka k číslování period
 - po periodě m opět následuje perioda 1
- Příklad: $(3, 5)$ problém

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Nejedná se o problém s kontinuálními 1
- Lze ukázat: řešení lineární relaxace problému je **velmi blízké** řešení celočíselného programu
- A tedy: následující algoritmus vede k optimálnímu řešení
- **Algoritmus**
 - 1 řešením lineární relaxace dostaneme x'_1, \dots, x'_n
pokud jsou x'_1, \dots, x'_n celá čísla \Rightarrow máme řešení, jinak
 - 2 vytvoř lineární programy LP' a LP'' s následujícími přidanými omezeními
LP': $x_1 + \dots + x_n = \lfloor x'_1 + \dots + x'_n \rfloor$
LP'': $x_1 + \dots + x_n = \lceil x'_1 + \dots + x'_n \rceil$
 - LP'' vždy nalezne optimální celočíselné řešení
 - LP' nemusí být řešitelný \Rightarrow LP'' řešení optimální pro LP
 - pokud má LP' celočíselné optimální řešení, pak optimální řešení LP je lepší z řešení LP' a LP''

- Rozvrhování volných dnů
 - základní problém
- Rozvrhování směn
 - obecný problém
- Cyklické rozvrhování směn
 - speciální případ

Rozvrhování předmětů na univerzitě

13. května 2021

- 39 Popis problému
- 40 Iniciální tvorba rozvrhu
- 41 Interaktivní rozvrhování

Typy problémů

- rozvrhování se studijními obory (curriculum-based timetabling)
 - curriculum (studijní obor): množina předmětů
 - každý student je zapsán do (jednoho nebo více) curricula
 - cíl: rozvrhování všech předmětů curricula bez překrývání
 - typické také pro rozvrhování na střední škole
- rozvrhování se zápis studentů (enrollment-based timetabling)
 - každý student je individuálně zapsán/zaregistrován do nějaké množiny předmětů
 - **studentský konflikt**: student není schopen absolvovat (dva) zaregistrované předměty vzhledem k jejich překryvu
 - cíl: nalezení rozvrhu, který minimalizuje počet studentských konfliktů
 - př. rozvrhování na FI
- dělení studentů na skupiny (student sectioning/student scheduling)
 - dělení studentů na skupiny pro velké předměty, kde je nutné několik seminárních nebo přednáškových skupin

Iniciální tvorba rozvrhu (vytvoření rozvrhu ze začátku) vs.

Interaktivní rozvrhování: změny vytvořeného rozvrhu

Vyvinutý na Purdue University (USA) ve spolupráci s FI MU a MFF UK

Komplexní systém pro univerzitní rozvrhování

- rozvrhování předmětů se studijními obory i i se zápisy
dělení studentů na skupiny
iniciální tvorba rozvrhu, interaktivní rozvrhování
- rozvrhování studentů, zkoušek, událostí
- otevřený zdrojový kód
- webové rozhraní, Java, SQL+hibernate, XML

Použití

- používáno pro rozvrhování na [Purdue University](#)
 - 70 různých problémů, celkem asi 40 000 studentů
- [Masarykova univerzita](#): používáno na téměř všech fakultách
- např. MIT, [USA](#), Lahore University of Management Sciences, [Pakistán](#), University of Zagreb, [Chorvatsko](#), AGH University of Science and Technology, [Polsko](#), Antalya International University, [Turecko](#), Universidad de Ingeniería y Tecnología (UTEC), [Peru](#), American College of Middle East (ACM), [Kuwait](#)

Materiál k přednášce

- **přehledová práce – rozvrhování na Purdue University**

H. Rudová, T. Müller, K. Murray, Complex university course timetabling. *Journal of Scheduling*, 14(2): 187-207, Springer, 2011.
<http://dx.doi.org/10.1007/s10479-010-0828-5>

Další materiály

- <http://www.unitime.org/publications.php>


















- **rozvrhování na Filozofické fakultě MU**

H. Rudová and T. Müller, Rapid Development of University Course Timetables (extended abstract). Proceedings of the 5th Multidisciplinary International Scheduling Conference (MISTA 2011), pages 649–652. 2011
<http://www.fi.muni.cz/~hanka/publ/mista11.pdf>

- **rozvrhování na Pedagogické fakultě MU a FSpS**

T. Müller, H. Rudová, Real-life Curriculum-based Timetabling with Elective Courses and Course Sections. *Annals of Operations Research*, 239(1):153-170, Springer, 2016.
<http://dx.doi.org/10.1007/s10479-014-1643-1>

Struktura předmětu s jeho třídami (vyučovanými částmi)

	Mins Per		Limit	Manager	Date Pattern	Time Pattern	Preferences			Instructor
	Demand	Week					Time	Room	Distribution	
M E 263		98	96							
M E 263H										
Lecture			150	96	LLR	Full Term	3 x 50 2 x 75	 WTHR  Computer		
Recitation			100	96	M E	Full Term	2 x 50	 ME 120  ME 236 Classroom		
Laboratory			50	84-120	LAB	Even Wks	1 x 50	 Windows XP		
Lec 1			150	96	LLR	Full Term	3 x 50 2 x 75	 WTHR  Computer		J. Smith C. Bing
Rec 1			100	48	M E	Full Term	2 x 50	 ME 120  ME 236 Classroom	Back-To-Back	J. Novak
Lab 1			50	14-20	LAB	Even Wks	1 x 50	 Windows XP		
Lab 2			50	14-20	LAB	Even Wks	1 x 50	 Windows XP		
Lab 3			50	14-20	LAB	Even Wks	1 x 50	 Windows XP		
Rec 2			100	48	M E	Full Term	2 x 50	 ME 120  ME 236 Classroom	Back-To-Back	J. Novak
Lab 4			50	14-20	LAB	Odd Wks	1 x 50	 Windows XP		
Lab 5			50	14-20	LAB	Odd Wks	1 x 50	 Windows XP		
Lab 6			50	14-20	LAB	Odd Wks	1 x 50	 Mac Os X		

Typická omezení

		Pevná omezení	Měkká omezení
Časy pro třídy*	časové vzory (pro pravidelné časy) individuální časy	x x	x
Místnosti pro třídy	individuální budovy/místnosti individuální vybavení místnosti	x x	x x
Omezení na zdroje	místnosti vyučující	x x	
Studenti	konflikty mezi dvěma třídami		x
Distribuční omezení mezi třídami	časové závislosti mezi třídami časové precedence mezi třídami třídy rozvrhované v podobných časech stejný nebo odlišný den/čas/místnost výuky pro třídy	x x x x	x x x x

***Třída** je každá rozvrhovaná položka/událost předmětu

Pevné podmínky

- musí být splněny

Měkké podmínky

- nemusí být splněny, pokud je to nutné

Měkké podmínky v rozvrhování: přehled

- studentské konflikty
- měkká omezení na čas
- měkká omezení na místnosti
- měkké distribuční podmínky

Vážený problém splňování podmínek (weighted CSP, WCSP) P

- zahrnuje pevné a měkké podmínky
- cíl: minimalizace F jako součtu vah nesplněných měkkých podmínek

Iterativní dopředné prohledávání (Iterative Forward Search, IFS) pro WCSP

P : WCSP, F : účelová funkce, $<$: komparátor

```
1: function IFS( $P, F, <$ )
2:    $i = 0$ 
3:    $\omega = \emptyset$  (současné přiřazení/rozvrh)
4:    $\sigma = \emptyset$  (nejlepší přiřazení/rozvrh)
5:   while canContinue( $\omega, i$ ) do
6:      $i = i + 1$ 
7:      $v = \text{selectVariable}(P, \omega)$  ( $v$  reprezentuje třídu)
8:      $d = \text{selectValue}(P, \omega, F, <, v)$  ( $d$  reprezentuje umístění v rozvrhu)
9:      $\gamma = \text{hardConflicts}(P, \omega, v/d)$  (předměty, které musím odpřihadit)
10:     $\omega = \omega \setminus \gamma \cup \{v/d\}$ 
11:    if  $F(\omega) < F(\sigma)$  then  $\sigma = \omega$ 
12:  end while
13:  return  $\sigma$ 
14: end function
```

Poznámka: není používána žádná propagace omezení

proměnná má buď přiřazenu iniciální hodnotu nebo má plnou iniciální doménu

Nalezení konfliktních proměnných $\gamma = \text{hardConflicts}(P, \omega, v/d)$

- vypočítá množinu proměnných γ takovou, že $\omega \setminus \gamma \cup \{v/d\}$ neporuší žádnou pevnou podmínku
- lze aplikovat jednoduchý algoritmus – vyšší počet iterací je lepší než sofistikovaný algoritmus

Výběr proměnné $\text{selectVariable}(P, \omega)$

- nevýznamný – chyby mohou být odstraněny budoucími iteracemi
- aplikováno náhodné uspořádání

Výběr hodnoty $\text{selectValue}(P, \omega, F, <, v)$

- velmi důležitý
- pro minimalizaci porušení měkkých podmínek:
 - výběr hodnoty d proměnné v s minimálním zhoršením $\Delta F(\omega, v/d)$ hodnoty účelové funkce s ohledem na měkká omezení
 - $\Delta F(\omega, v/d) = F(\omega \cup \{v/d\}) - F(\omega)$ (výpočet inkrementální)
- pro minimalizaci porušení pevných podmínek: konfliktní statistika

Current Assignment of C S 101 Lab 2

Not assigned.

Room Locations: 1 (EDUC 108)

Time Locations: 3 (M 9:30a, M 11:30a, M 1:30p)

Conflict-based Statistics

- ☐ 2123× Room EDUC 108
 - ☐ 718× M 11:30a - 1:20p Full Term EDUC 108
 - ☐ 260× C S 101 Lab 3 ← M 11:30a - 1:20p Full Term EDUC 108
 - ☐ 235× C S 101 Lab 1 ← M 11:30a - 1:20p Full Term EDUC 108
 - ☐ 222× C S 101 Lab 4 ← M 11:30a - 1:20p Full Term EDUC 108
 - ☐ 1× ENGR 101 Lab 2 ← M 11:30a - 1:20p Full Term EDUC 108
 - ☐ 718× M 1:30p - 3:20p Full Term EDUC 108
 - ☐ 256× C S 101 Lab 1 ← M 1:30p - 3:20p Full Term EDUC 108
 - ☐ 235× C S 101 Lab 4 ← M 1:30p - 3:20p Full Term EDUC 108
 - ☐ 226× C S 101 Lab 3 ← M 1:30p - 3:20p Full Term EDUC 108
 - ☐ 1× ENGR 101 Lab 2 ← M 1:30p - 3:20p Full Term EDUC 108
 - ☐ 687× M 9:30a - 11:20a Full Term EDUC 108
 - ☐ 252× C S 101 Lab 1 ← M 9:30a - 11:20a Full Term EDUC 108
 - ☐ 240× C S 101 Lab 4 ← M 9:30a - 11:20a Full Term EDUC 108
 - ☐ 192× C S 101 Lab 3 ← M 9:30a - 11:20a Full Term EDUC 108

Předpoklad: při výběru hodnoty a proměnné A je nutné zrušit přiřazení hodnoty b proměnné B , tj. $[A = a \rightarrow \neg B = b]$

V průběhu výpočtu si tedy lze pamatovat:

$$A = a \Rightarrow 3 \times \neg B = b, \quad 4 \times \neg B = c, \quad 1 \times \neg C = a, \quad 120 \times \neg D = a$$

Při výběru hodnoty

- výběr hodnoty s nejnižším počtem konfliktů váženým jejich frekvencí
 - **konflikt započítáme pouze, pokud to vede k odstranění přiřazení**

- př. $A = a \Rightarrow 3 \times \neg B = b, \quad 90 \times \neg B = c,$
 $1 \times \neg C = a, \quad 120 \times \neg D = a$

$$A = b \Rightarrow 1 \times \neg B = a, \quad 3 \times \neg B = b, \quad 2 \times \neg C = a$$

za předpokladu, že máme přiřazení $B = c, C = a, D = b$

- necht' A/a vede ke konfliktu s B/c : vyhodnoceno jako 90
 - není konflikt s C/a , tak se nezapočítává
- necht' A/b vede ke konfliktu s C/a : vyhodnoceno jako 2
- tj. vybereme hodnotu b pro proměnnou A

- $CBS[x = d_x \rightarrow \neg y = d_y] = c_{xy}$: při přiřazení $x = d_x$ bylo nutné zrušit přiřazení $y = d_y$ v minulosti c_{xy} -krát
- Jestliže je hodnota d vybrána pro proměnnou v v IFS, potom $\text{hardConflicts}(P, \omega, v/d)$ vypočítá přiřazení $\gamma = \{v_1/d_1, v_2/d_2, \dots, v_n/d_n\}$, které musí být zrušeno, aby byla vynucena konzistence nového částečného přiřazení
Jako důsledek jsou navýšeny čítače

$$CBS[v = d \rightarrow \neg v_1 = d_1], \quad CBS[v = d \rightarrow \neg v_2 = d_2], \quad \dots, \\ CBS[v = d \rightarrow \neg v_n = d_n] .$$

- Konfliktní statistika je používána jako heuristika pro **výběr hodnoty**
Evaluace hodnoty d proměnné v :

$$\sum_{v_i/d_i \in \omega \wedge v_i/d_i \in \text{hardConflicts}(P, \omega, v/d)} CBS[v = d \rightarrow \neg v_i = d_i]$$

tj. konflikt započítáme pouze tehdy, pokud to vede k odstranění přiřazení

Uvažovány změny s třídou PSY 120 Lec 5

Suggestions

<u>Score</u>	<u>Class</u>	<u>Date</u>	<u>Time</u>	<u>Room</u>	<u>Students</u>
+43	PSY 120 Lec 5	Full Term	MWF 7:30a	WTHR 200 → CL50 224	0
+48.4	PSY 120 Lec 5	Full Term	MWF 7:30a → TTh 7:30a	WTHR 200 → CL50 224	+10
+63.3	PSY 120 Lec 5	Full Term	MWF 7:30a → MWF 4:30p	WTHR 200 → LILY 1105	+14
	POL 130 Lec 2	Full Term	MWF 4:30p → MWF 9:30a	LILY 1105 → RHPH 172	
+63.9	PSY 120 Lec 5	Full Term	MWF 7:30a → MWF 4:30p	WTHR 200 → LILY 1105	+16
	POL 130 Lec 2	Full Term	MWF 4:30p	LILY 1105 → FRNY G140	
+63.9	PSY 120 Lec 5	Full Term	MWF 7:30a → MWF 4:30p	WTHR 200 → LILY 1105	+16
	POL 130 Lec 2	Full Term	MWF 4:30p	LILY 1105 → LYNN 1136	

(all 235 possibilities up to 2 changes were considered, top 5 of 22 suggestions displayed)

[Search Deeper](#)

Opravná verze metody větví a mezí (Repair-based BB)

Algoritmus

- n nejlepších návrhů ω je vráceno uživateli
- prohledávání s časovým limitem
- hodnoty s nejlepší $\Delta F(\omega, v/d)$ prozkoumávány nejdříve
 - konfliktní statistika není brána v úvahu vzhledem k výpočetní náročnosti

Meze

- omezená hloubka prohledávání
 - abychom umožnili pouze malý počet změn proměnných
 - pro zahrnutí změny na jedné třídě nemá smysl měnit příliš mnoho dalších tříd
 - M : maximální hloubka
- hodnota účelové funkce F musí být lepší než n -tý nejlepší návrh
 - $\Omega[n]$: n -tý nejlepší návrh

Opakování RepairBB: provádění nového RepairBB

- se zvětšenou hloubkou prohledávání a/nebo
- zvětšeným časovým limitem

Opravná verze metody větví a mezí

- P : WCSP
- ω : současné přiřazení
- v_{bb} : proměnná (třída), která bude přiřazována

```
1: function RepairBB( $P, \omega, v_{bb}$ )
2:   if  $\{v_{bb}/d\} \subseteq \omega$  then  $\omega = \omega \setminus \{v_{bb}/d\}$ 
3:   else  $d = nil$ 
4:    $\gamma = \{v_{bb}/d\}$ 
5:   return backtrack( $P, \omega, \emptyset, \gamma, \emptyset, 0$ )
6: end function
```

backtrack($P, \omega, \mu, \gamma, \Omega, m$)

- μ : nově vybrané přiřazení aktuálním prohledáváním do hloubky
- γ : proměnné (s případným původním přiřazením), pro které hledáme přiřazení
- Ω : návrhy (několik dosud nejlepších nalezených přiřazení)
- m : aktuální hloubka prohledávání

Funkce backtrack

```
1: function backtrack( $P, \omega, \mu, \gamma, \Omega, m$ )
2:   if  $\|\gamma\| + m > M$  then return  $\emptyset$       ( $M$  je maximální hloubka)
3:   if  $\gamma = \emptyset$  then return  $\omega$       (konflikty vyřešeny)
4:   if timeout then return  $\emptyset$ 
5:   if  $LowerBound(F(\omega \cup \gamma)) \geq F(\Omega[n])$  then return  $\emptyset$ 
      (odhad kvality nového přiřazení (po zahrnutí  $\gamma$ ) je horší než  $n$ -tý návrh)
6:    $v = selectVariableBB(\gamma)$       (je vybrána některá nepřirazená proměnná)
7:   let  $v/d_o \in \gamma$       ( $d_o$  je původní hodnota proměnné  $v$ )
8:   for  $d \in D_v$  ordered by  $\Delta F(\omega, v/d)$  do
9:     if  $d = d_o$  then continue      (je vybrána původní hodnota)
10:     $\alpha = hardConflicts(P, \omega, v/d)$ 
11:    if  $\alpha \cap \mu \neq \emptyset$  then continue      (konflikt s už vybraným přiřazením)
12:     $\Omega = \Omega \cup backtrack(P, \omega \cup \{v/d\}, \mu \cup \{v/d\},$ 
       $\gamma \setminus \{v/d_o\} \cup \alpha, \Omega, m + 1)$ 
13:  end for
14:  return  $\Omega$ 
15: end function
```

UniTime.org: GUI s vygenerovaným rozvrhem

Purdue Timetabling

https://foregano.smas.purdue.edu:18443/Timetabling/selectPrimaryRole.do

Purdue Timetabling

Timetable

Filter

Export PDF Refresh

Legend

	7:30a	8:00a	8:30a	9:00a	9:30a	10:00a	10:30a	11:00a	11:30a	12:00p	12:30p	1:00p	1:30p	2:00p	2:30p	3:00p	3:30p	4:00p	4:30p	5:00p	
EE 129 (448)																					
Mon			MA 16200 Lec 1 0, 7, 0		PSY 12000 Lec 4 0, 0, 0	EDCI 27000 Lec 1 0, 0, 0	ECON 21000 Lec 1 0, 33, 0				PSY 12000 Lec 5 0, 0, 0		MA 16100 Lec 2 0, 0, 0	CSR 34200 Lec 1 0, 23, 0		SOC 10000 Lec 4 0, 0, 0	MA 18200 Lec 2 0, 0, 0	MA 26100 Lec 1 0, 0, 4			
Tue			SOC 22000 Lec 1 40, 0, 0		ECON 25100 Lec 3 1, 0, 0	ENGR 10000 Lec 1 0, 0, 0					AGEC 33100 Lec 1 0, 0, 0		ECON 25100 Lec 1 0, 0, 0							PSY 12000 Lec 2 8, 4, 0	
Wed				MA 16200 Lec 1 0, 7, 0	PSY 12000 Lec 4 0, 0, 0	ENGR 10000 Lec 3 0, 0, 0	ECON 21000 Lec 1 0, 33, 0				PSY 12000 Lec 5 0, 0, 0		MA 16100 Lec 2 0, 0, 0	CSR 34200 Lec 1 0, 23, 0						MA 26100 Lec 1 0, 0, 4	
Thu			SOC 22000 Lec 1 40, 0, 0		ECON 25100 Lec 3 0, 0, 0	ENGR 10000 Lec 2 0, 0, 0					AGEC 33100 Lec 1 0, 0, 0		ECON 25100 Lec 1 0, 0, 0			SOC 10000 Lec 4 0, 0, 0				PSY 12000 Lec 2 8, 4, 0	
Fri				MA 16200 Lec 1 0, 7, 0	PSY 12000 Lec 4 0, 0, 0	ENGR 10000 Lec 4 0, 0, 0	GNIT 13600 Lec 1 19, 1, 0				PSY 12000 Lec 5 0, 0, 0		MA 16100 Lec 2 0, 0, 0							MA 26100 Lec 1 0, 0, 0	
EE 170 (172)																					
Mon			ECE 20100 Lec 3 0, 0, 0	CE 29700 Lec 1 0, 0, 0		AEE 20300 Lec 1 0, 0, 0	CE 20300 Lec 1 0, 0, 1	ENTM 41800 Lec 1 32, 27, 8			CE 34000 Lec 1 0, 0, 0		AEE 35200 Lec 1 10, 4, 2			AEE 30100 Lec 1 0, 4, 0				ECE 27000 Lec 1 0, 0, 0	
Tue			PHPR 47800 Lec 1 0, 0, 1	BCM 10000 Lec 1 4, 0, 0		PSY 23500 Lec 1 0, 0, 0		SOC 32400 Lec 1 0, 0, 0			PHAD 46400 Lec 1 0, 0, 0									CSR 20900 Lec 1 0, 11, 0	
Wed			ECE 20100 Lec 3 0, 0, 4	CE 29700 Lec 1 0, 0, 0	CS 15900 Lec 2 1, 0, 0	AEE 20300 Lec 1 0, 0, 0	CE 20300 Lec 1 0, 0, 0	CS 15900 Lec 1 0, 0, 0			CE 34000 Lec 1 0, 0, 0		AEE 35200 Lec 1 10, 4, 2			AEE 30100 Lec 1 0, 0, 0				ECE 27000 Lec 1 0, 0, 0	
Thu				PHPR 47800 Lec 1 0, 0, 1	BCM 10000 Lec 1 4, 0, 0		PSY 23500 Lec 1 0, 0, 0			SOC 32400 Lec 1 0, 0, 0			PHAD 46400 Lec 1 0, 0, 0			ECE 69400 Lec 1 0, 0, 0				CSR 20900 Lec 1 0, 11, 0	
Fri			ECE 20100 Lec 3 0, 0, 4	CE 29700 Lec 1 0, 0, 0	CS 15900 Lec 2 1, 0, 0	AEE 20300 Lec 1 0, 0, 1	CE 20300 Lec 1 0, 0, 1	CE 34000 Lec 1 0, 0, 0			CE 34000 Lec 1 0, 0, 0		AEE 35200 Lec 1 10, 4, 2			AEE 30100 Lec 1 0, 0, 0				ECE 27000 Lec 1 0, 0, 0	
MSEE 8012 (96)																					
Mon			SLHS 30400 Lec 1 24, 0, 0		MSE 23500 Lec 1 0, 0, 0	CE 47300 Lec 1 0, 1, 4		ENGL 27600 Lab 1 0, 0, 0			POL 30000 Lec 1 0, 0, 4		EAS 10900 Lec 1 0, 0, 0			NUR 30200 Lec 1 0, 0, 0				AEE 43900 Lec 1 0, 0, 0	
Tue						HIST 30400 Lec 1 0, 0, 0		EAS 31200 Lec 1 0, 0, 0			HSCI 31200 Lec 1 0, 0, 0		HSCI 58000 Lec 1 0, 0, 0			ECE 30200 Lec 2 0, 0, 0				CSR 41500 Lec 1 0, 0, 0	
Wed			SLHS 30400 Lec 1 24, 0, 0			CE 47300 Lec 1 0, 0, 4		ENGL 27600 Lec 1 0, 0, 4			POL 30000 Lec 1 0, 0, 4		EAS 10900 Lec 1 0, 0, 0			NUR 30200 Lec 1 0, 0, 0				AEE 43900 Lec 1 0, 0, 0	
Thu						HIST 30400 Lec 1 0, 0, 0					HSCI 31200 Lec 1 0, 0, 4		HSCI 58000 Lec 1 0, 0, 0			ECE 30200 Lec 2 0, 0, 0				CSR 41500 Lec 1 0, 0, 0	
Fri			SLHS 30400 Lec 1 24, 0, 0		MSE 23500 Lec 1a 0, 0, 0	CE 47300 Lec 1 0, 0, 4		ECE 36400 Lec 1 0, 0, 0													AEE 43900 Lec 1 0, 0, 0
EE 170 (172)																					

Current User: Solver Status

Name: Mike Timas

Dept: SMC

Role: Administrator

Status: Fall 2009 (PWL)

Session: Timetabling

Database: timetabling@smasreader

Version: 3.11.105 (Purdue)

Logged: 10/11/09 07:53 AM

	Jaro 2014	Podzim 2014
Místnosti	14+5	14+6
Vyučující	197	231
Předměty	190	199
Třídy	500	604
Registrace	12 701 ⁺	14 055 ⁺
Registrace + obory	17 599	20 670
Konflikty dop.přůchody		4x
Konflikty	958	1 440
Preference na čas	75,89 %	78,2 %

⁺ odstraněny registrace cca 25 studentů s více než 20 předměty

- **Mezinárodní soutěž, kterou organizuje i FI MU**
 - <https://www.itc2019.org>
 - rozvrhování univerzitních předmětů
- **Vychází z reálných problémů shromážděných v systému UniTime**
 - řešení problémů z celého světa včetně rozvrhování FI MU
 - anonymizovaná data
 - málo významné charakteristiky problémů odstraněny
 - snaha soustředit se na důležité rysy problému
- **Průběh soutěže**
 - tři množiny datových sad publikovány během soutěžního období
 - dostupný validátor řešení – založený na řešiči UniTime
 - submitování validních řešení přes web soutěže
 - srpen 2018: zveřejnění
listopad 2018: publikována první soutěžní data
listopad 2019: konec
- **Aktuálně**
 - 130 uživatelů ze 44 zemí

- Typy řešených problémů
 - studijní obory, zápisy, dělení na skupiny
 - iniciální vs. interaktivní rozvrhování
- UniTime
- Model problému
 - struktura předmětu
 - omezení a účelové funkce
- Prohledávání
 - iterativní dopředné prohledávání
 - konfliktní statistika
 - opravná verze metody větví a mezí

Zdroje, ze kterých průsvitky čerpají

V průsvitkách jsou použity obrázky a texty z uvedených zdrojů

- Michael Pinedo, *Planning and Scheduling in Manufacturing and Services*. Springer, 2005.
- Erwin Hans, Johann Hurink, *Production Planning*. Přednáška na University of Twente, Nizozemí. <http://www.stern.nyu.edu/om/faculty/pinedo/book2/download.html>
- Sanja Petrovič, *Automated Scheduling*. Přednáška na University of Nottingham, UK.
- Sigurdur Olafsson, *Production Scheduling*. Přednáška na Iowa State University, USA, http://www.public.iastate.edu/~olafsson/ie514_2001.html, <http://www.stern.nyu.edu/om/faculty/pinedo/book2/download.html>
- Roman Barták, *Plánování a rozvrhování*. Přednáška na MFF UK, <http://kti.ms.mff.cuni.cz/~bartak/planovani/prednaska.html>
- Thom Frühwirth and Slim Abdennadher. *Essentials of Constraint Programming*, Springer Verlag, 2003. <http://www.informatik.uni-ulm.de/pm/fileadmin/pm/home/fruehwirth/pisa/>
- Hana Rudová, Tomáš Müller and Keith Murray, *Complex university course timetabling*. *Journal of Scheduling*, 14(2): 187-207, Springer, 2011. <http://dx.doi.org/10.1007/s10951-010-0171-3>
- IBM ILOG CP optimizer for scheduling, Philippe Laborie et al., *Constraints*, 23(2):210-250, 2018