1

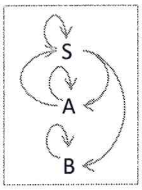
7.10 Odstraňte levou rekurzi a transformujte do GNF

$G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$, kde

$$
\begin{aligned}
P = \{\; S &\to Aa \mid Bb \mid aaA \mid SaA \mid SbB, \\
A &\to AAb \mid ab \mid SBb, \\
B &\to Bbb \mid BBB \mid bAb \;\}
\end{aligned}
$$

I. Odstranění levé rekurze

1. Zkontroluj, že na vstupu je vlastní gramatika; pokud ne, nejprve transformuj vstupní gramatiku na vlastní , tj. - bez nepoužitelných symb., ε prav., cyklů
   - ➢ Gramatika je OK
2. Uspořádej neterminály a nakresli si pomocný graf
   - ➢ Pomocný graf: neterminály nakreslit pod sebe ve zvoleném uspořádání, „nejmenší" je nahoře; hrana vede z X do Y, pokud pro X existuje pravidlo, v němž nejlevější symbol je Y
   - ➢ Neterminály lze uspořádat libovolně, ale hodí se zvolit uspořádání s co nejmenším počtem „zpětných šipek" v grafu
   - ➢ Volím uspořádání S<A<B, graf vypadá takto:



Algoritmus odstranění levé rekurze

Vstup: Vlastní CFG $\mathcal{G} = (N, \Sigma, P, S)$
Výstup: Ekvivalentní nelevorekursivní gramatika bez ε-pravidel

```
Uspořádej libovolně N, N = {A_1, ..., A_n}
for i ← 1 to n do
    for j ← 1 to i − 1 do
        for all pravidlo tvaru A_i → A_j α do
            přidej pravidla A_i → β_1 α | ... | β_k α
            (kde A_j → β_1 | ... | β_k jsou všechna pravidla pro A_j)
            vypusť pravidlo A_i → A_j α
        end for
    end for
    odstraň případnou přímou levou rekursi na A_i
end for
```

Algoritmus odstranění přímé levé rekurze

Nechť CFG $\mathcal{G} = (N, \Sigma, P, S)$ je necyklická a bez ε-pravidel, v níž všechna A-pravidla (pravidla mající na levé straně A) jsou tvaru

$$A \to A\alpha_1 \mid \ldots \mid A\alpha_m \mid \beta_1 \mid \ldots \mid \beta_n,$$

kde každý řetěz β_i začíná symbolem různým od A.

Nechť $\mathcal{G}' = (N \cup \{A'\}, \Sigma, P', S)$, kde P' obdržíme z P tak, že všechna výše uvedená pravidla nahradíme pravidly:

$$A \to \beta_1 \mid \ldots \mid \beta_n \mid \beta_1 A' \mid \ldots \mid \beta_n A'$$

$$A' \to \alpha_1 \mid \ldots \mid \alpha_m \mid \alpha_1 A' \mid \ldots \mid \alpha_m A'$$

Pak $L(\mathcal{G}) = L(\mathcal{G}')$ a $\mathcal{G}'$ je necyklická a bez ε-pravidel.

2

7.10 Odstraňte levou rekurzi a transformujte do GNF

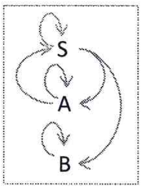
$G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$, kde

$$
\begin{aligned}
P = \{\; S &\to Aa \mid Bb \mid aaA \mid SaA \mid SbB, \\
A &\to AAb \mid ab \mid SBb, \\
B &\to Bbb \mid BBB \mid bAb \;\}
\end{aligned}
$$

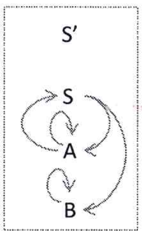
I. Odstranění levé rekurze

3. Procházej neterminály v daném uspořádání od nejmenšího („nahoře" v grafu) a hledej pravidla začínající menším neterminálem – ta potřebujeme transformovat, aby se zamezilo vzniku rekurze. V grafu to odpovídá hledání zpětných šipek. Nejprve odstraňujeme nejdelší zpětnou šipku, pak další.
   - ➢ U prvního neterminálu nemůže být zpětná šipka, ale může být přímá rekurze.
   - ➢ U S je přímá levá rekurze, odstraníme dle algoritmu a upravíme graf. Nový neterminál S' zařadíme na začátek uspořádání, protože tím nám nemůže vzniknout žádná zpětná hrana – S' nikdy není nejlevějším symbolem pravidla

$$
\begin{aligned}
P = \{\; S &\to Aa \mid Bb \mid aaA \mid SaA \mid SbB, \\
A &\to AAb \mid ab \mid SBb, \\
B &\to Bbb \mid BBB \mid bAb \;\}
\end{aligned}
$$



$$
\begin{aligned}
P = \{\; S &\to Aa \mid Bb \mid aaA \mid AaS' \mid BbS' \mid aaAS', \\
S' &\to aA \mid bB \mid aAS' \mid bBS', \\
A &\to AAb \mid ab \mid SBb, \\
B &\to Bbb \mid BBB \mid bAb \;\}
\end{aligned}
$$



Algoritmus odstranění levé rekurze

Vstup: Vlastní CFG $\mathcal{G} = (N, \Sigma, P, S)$
Výstup: Ekvivalentní nelevorekursivní gramatika bez ε-pravidel

```
Uspořádej libovolně N, N = {A_1, ..., A_n}
for i ← 1 to n do
    for j ← 1 to i − 1 do
        for all pravidlo tvaru A_i → A_j α do
            přidej pravidla A_i → β_1 α | ... | β_k α
            (kde A_j → β_1 | ... | β_k jsou všechna pravidla pro A_j)
            vypusť pravidlo A_i → A_j α
        end for
    end for
    odstraň případnou přímou levou rekursi na A_i
end for
```

Algoritmus odstranění přímé levé rekurze

Nechť CFG $\mathcal{G} = (N, \Sigma, P, S)$ je necyklická a bez ε-pravidel, v níž všechna A-pravidla (pravidla mající na levé straně A) jsou tvaru

$$A \to A\alpha_1 \mid \ldots \mid A\alpha_m \mid \beta_1 \mid \ldots \mid \beta_n,$$

kde každý řetěz β_i začíná symbolem různým od A.

Nechť $\mathcal{G}' = (N \cup \{A'\}, \Sigma, P', S)$, kde P' obdržíme z P tak, že všechna výše uvedená pravidla nahradíme pravidly:

$$A \to \beta_1 \mid \ldots \mid \beta_n \mid \beta_1 A' \mid \ldots \mid \beta_n A'$$

$$A' \to \alpha_1 \mid \ldots \mid \alpha_m \mid \alpha_1 A' \mid \ldots \mid \alpha_m A'$$

Pak $L(\mathcal{G}) = L(\mathcal{G}')$ a $\mathcal{G}'$ je necyklická a bez ε-pravidel.

3

7.10 Odstraňte levou rekurzi a transformujte do GNF

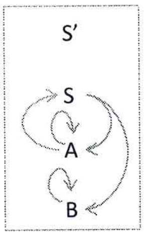
$G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$, kde

$$\begin{aligned} P = \{\ S &\to Aa \mid Bb \mid aaA \mid SaA \mid SbB, \\ A &\to AAb \mid ab \mid SBb, \\ B &\to Bbb \mid BBB \mid bAb\ \} \end{aligned}$$

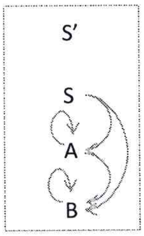
I. Odstranění levé rekurze

3. Procházej neterminály v daném uspořádání od nejmenšího („nahoře" v grafu) a hledej pravidla začínající menším neterminálem – ta potřebujeme transformovat, aby se zamezilo vzniku rekurze. V grafu to odpovídá hledání zpětných šipek. Nejprve odstraňujeme nejdelší zpětnou šipku, pak další.
   - Po zpracování S je na řadě A, nejdřív řešíme nejdelší zpětnou šipku do S. Jejím odstraněním vznikne nová šipka z A do B.

$$\begin{aligned} P = \{\ S &\to Aa \mid Bb \mid aaA \mid AaS' \mid BbS' \mid aaAS', \\ S' &\to aA \mid bB \mid aAS' \mid bBS', \\ A &\to AAb \mid ab \mid SBb, \\ B &\to Bbb \mid BBB \mid bAb\ \} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} P = \{\ S &\to Aa \mid Bb \mid aaA \mid AaS' \mid BbS' \mid aaAS', \\ S' &\to aA \mid bB \mid aAS' \mid bBS', \\ A &\to AAb \mid ab \mid AaBb \mid BbBb \mid aaABb \mid AaS'Bb \mid \\ &\quad\ BbS'Bb \mid aaAS'Bb, \\ B &\to Bbb \mid BBB \mid bAb\ \} \end{aligned}$$



Algoritmus odstranění levé rekurze

Vstup: Vlastní CFG $\mathcal{G} = (N, \Sigma, P, S)$
Výstup: Ekvivalentní nelevorekursivní gramatika bez ε-pravidel

Uspořádej libovolně N, $N = \{A_1, \dots, A_n\}$
for $i \leftarrow 1$ **to** n **do**
  for $j \leftarrow 1$ **to** $i - 1$ **do**
    for all pravidlo tvaru $A_i \to A_j\alpha$ **do**
      přidej pravidla $A_i \to \beta_1\alpha \mid \dots \mid \beta_k\alpha$
      (kde $A_j \to \beta_1 \mid \dots \mid \beta_k$ jsou všechna pravidla pro A_j)
      vypusť pravidlo $A_i \to A_j\alpha$
    end for
  end for
  odstraň případnou přímou levou rekursi na A_i
end for

Algoritmus odstranění přímé levé rekurze

Nechť CFG $\mathcal{G} = (N, \Sigma, P, S)$ je necyklická a bez ε-pravidel, v níž všechna A-pravidla (pravidla mající na levé straně A) jsou tvaru

$$A \to A\alpha_1 \mid \dots \mid A\alpha_m \mid \beta_1 \mid \dots \mid \beta_n,$$

kde každý řetěz β_i začíná symbolem různým od A.

Nechť $\mathcal{G}' = (N \cup \{A'\}, \Sigma, P', S)$, kde P' obdržíme z P tak, že všechna výše uvedená pravidla nahradíme pravidly:

$$A \to \beta_1 \mid \dots \mid \beta_n \mid \beta_1 A' \mid \dots \mid \beta_n A'$$
$$A' \to \alpha_1 \mid \dots \mid \alpha_m \mid \alpha_1 A' \mid \dots \mid \alpha_m A'$$

Pak $L(\mathcal{G}) = L(\mathcal{G}')$ a $\mathcal{G}'$ je necyklická a bez ε-pravidel.

4

7.10 Odstraňte levou rekurzi a transformujte do GNF

$G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$, kde

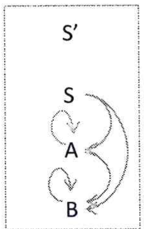
$$\begin{aligned} P = \{\ S &\to Aa \mid Bb \mid aaA \mid SaA \mid SbB, \\ A &\to AAb \mid ab \mid SBb, \\ B &\to Bbb \mid BBB \mid bAb\ \} \end{aligned}$$

I. Odstranění levé rekurze

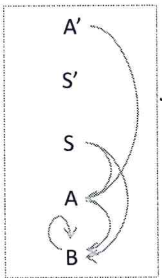
3. Procházej neterminály v daném uspořádání od nejmenšího („nahoře" v grafu) a hledej pravidla začínající menším neterminálem – ta potřebujeme transformovat, aby se zamezilo vzniku rekurze. V grafu to odpovídá hledání zpětných šipek. Nejprve odstraňujeme nejdelší zpětnou šipku, pak další.
   - V dalším kroku řešíme přímou rekurzi na A, nový neterminál A' opět zařadíme na začátek uspořádání

$$\begin{aligned} P = \{\ S &\to Aa \mid Bb \mid aaA \mid AaS' \mid BbS' \mid aaAS', \\ S' &\to aA \mid bB \mid aAS' \mid bBS', \\ A &\to AAb \mid ab \mid AaBb \mid BbBb \mid aaABb \mid AaS'Bb \mid \\ &\quad\ BbS'Bb \mid aaAS'Bb, \\ B &\to Bbb \mid BBB \mid bAb\ \} \end{aligned}$$

SPUNTY



$$\begin{aligned} P = \{\ S &\to Aa \mid Bb \mid aaA \mid AaS' \mid BbS' \mid aaAS', \\ S' &\to aA \mid bB \mid aAS' \mid bBS', \\ A &\to ab \mid BbBb \mid aaABb \mid BbS'Bb \mid aaAS'Bb \mid abA' \mid \\ &\quad\ BbBbA' \mid aaABbA' \mid BbS'BbA' \mid aaAS'BbA', \\ A' &\to Ab \mid aBb \mid aS'Bb \mid AbA' \mid aBbA' \mid aS'BbA', \\ B &\to Bbb \mid BBB \mid bAb\ \} \end{aligned}$$



Algoritmus odstranění levé rekurze

Vstup: Vlastní CFG $\mathcal{G} = (N, \Sigma, P, S)$
Výstup: Ekvivalentní nelevorekursivní gramatika bez ε-pravidel

Uspořádej libovolně N, $N = \{A_1, \dots, A_n\}$
for $i \leftarrow 1$ **to** n **do**
  for $j \leftarrow 1$ **to** $i - 1$ **do**
    for all pravidlo tvaru $A_i \to A_j\alpha$ **do**
      přidej pravidla $A_i \to \beta_1\alpha \mid \dots \mid \beta_k\alpha$
      (kde $A_j \to \beta_1 \mid \dots \mid \beta_k$ jsou všechna pravidla pro A_j)
      vypusť pravidlo $A_i \to A_j\alpha$
    end for
  end for
  odstraň případnou přímou levou rekursi na A_i
end for

Algoritmus odstranění přímé levé rekurze

Nechť CFG $\mathcal{G} = (N, \Sigma, P, S)$ je necyklická a bez ε-pravidel, v níž všechna A-pravidla (pravidla mající na levé straně A) jsou tvaru

$$A \to A\alpha_1 \mid \dots \mid A\alpha_m \mid \beta_1 \mid \dots \mid \beta_n,$$

kde každý řetěz β_i začíná symbolem různým od A.

Nechť $\mathcal{G}' = (N \cup \{A'\}, \Sigma, P', S)$, kde P' obdržíme z P tak, že všechna výše uvedená pravidla nahradíme pravidly:

$$A \to \beta_1 \mid \dots \mid \beta_n \mid \beta_1 A' \mid \dots \mid \beta_n A'$$
$$A' \to \alpha_1 \mid \dots \mid \alpha_m \mid \alpha_1 A' \mid \dots \mid \alpha_m A'$$

Pak $L(\mathcal{G}) = L(\mathcal{G}')$ a $\mathcal{G}'$ je necyklická a bez ε-pravidel.

5

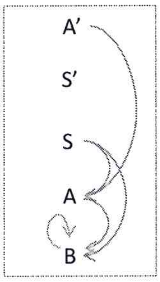
7.10 Odstraňte levou rekurzi a transformujte do GNF

$$G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S), \text{ kde}$$
$$\begin{aligned} P = \{\ S &\to Aa \mid Bb \mid aaA \mid SaA \mid SbB, \\ A &\to AAb \mid ab \mid SBb, \\ B &\to Bbb \mid BBB \mid bAb\ \} \end{aligned}$$

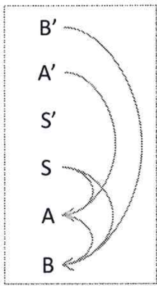
I. Odstranění levé rekurze

3. Procházej neterminály v daném uspořádání od nejmenšího („nahoře" v grafu) a hledej pravidla začínající menším neterminálem – ta potřebujeme transformovat, aby se zamezilo vzniku rekurze. V grafu to odpovídá hledání zpětných šipek. Nejprve odstraňujeme nejdelší zpětnou šipku, pak další.
   - Poslední krok – přímá rekurze na B

$$\begin{aligned} P = \{\ S &\to Aa \mid Bb \mid aaA \mid AaS' \mid BbS' \mid aaAS', \\ S' &\to aA \mid bB \mid aAS' \mid bBS', \\ A &\to ab \mid BbBb \mid aaABb \mid BbS'Bb \mid aaAS'Bb \mid abA' \mid \\ & \quad BbBbA' \mid aaABbA' \mid BbS'BbA' \mid aaAS'BbA', \\ A' &\to Ab \mid aBb \mid aS'Bb \mid AbA' \mid aBbA' \mid aS'BbA', \\ B &\to Bbb \mid BBB \mid bAb\ \} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} P = \{\ S &\to Aa \mid Bb \mid aaA \mid AaS' \mid BbS' \mid aaAS', \\ S' &\to aA \mid bB \mid aAS' \mid bBS', \\ A &\to ab \mid BbBb \mid aaABb \mid BbS'Bb \mid aaAS'Bb \mid abA' \mid \\ & \quad BbBbA' \mid aaABbA' \mid BbS'BbA' \mid aaAS'BbA', \\ A' &\to Ab \mid aBb \mid aS'Bb \mid AbA' \mid aBbA' \mid aS'BbA', \\ B &\to bAb \mid bAbB', \\ B' &\to bb \mid BB \mid bbB' \mid BBB'\ \} \end{aligned}$$



Algoritmus odstranění levé rekurze

Vstup: Vlastní CFG $\mathcal{G} = (N, \Sigma, P, S)$
Výstup: Ekvivalentní nelevorekursivní gramatika bez ε-pravidel

Uspořádej libovolně N, $N = \{A_1, \dots, A_n\}$
for $i \leftarrow 1$ **to** n **do**
  for $j \leftarrow 1$ **to** $i-1$ **do**
    for all pravidlo tvaru $A_i \to A_j\alpha$ **do**
      přidej pravidla $A_i \to \beta_1\alpha \mid \dots \mid \beta_k\alpha$
      (kde $A_j \to \beta_1 \mid \dots \mid \beta_k$ jsou všechna pravidla pro A_j)
      vypusť pravidlo $A_i \to A_j\alpha$
    end for
  end for
  odstraň případnou přímou levou rekursi na A_i
end for

Algoritmus odstranění přímé levé rekurze

Nechť CFG $\mathcal{G} = (N, \Sigma, P, S)$ je necyklická a bez ε-pravidel, v níž všechna A-pravidla (pravidla mající na levé straně A) jsou tvaru

$$A \to A\alpha_1 \mid \dots \mid A\alpha_m \mid \beta_1 \mid \dots \mid \beta_n,$$

kde každý řetěz β_i začíná symbolem různým od A.

Nechť $\mathcal{G}' = (N \cup \{A'\}, \Sigma, P', S)$, kde P' obdržíme z P tak, že všechna výše uvedená pravidla nahradíme pravidly:

$$A \to \beta_1 \mid \dots \mid \beta_n \mid \beta_1 A' \mid \dots \mid \beta_n A'$$
$$A' \to \alpha_1 \mid \dots \mid \alpha_m \mid \alpha_1 A' \mid \dots \mid \alpha_m A'$$

Pak $L(\mathcal{G}) = L(\mathcal{G}')$ a $\mathcal{G}'$ je necyklická a bez ε-pravidel.

7.10 Odstraňte levou rekurzi a transformujte do GNF

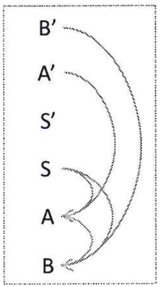
$$G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S), \text{ kde}$$
$$\begin{aligned} P = \{\ S &\to Aa \mid Bb \mid aaA \mid SaA \mid SbB, \\ A &\to AAb \mid ab \mid SBb, \\ B &\to Bbb \mid BBB \mid bAb\ \} \end{aligned}$$

6

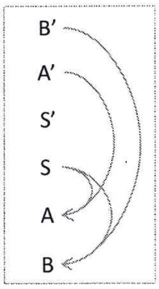
II. Transformace do GNF

1. Použij uspořádání z předchozího kroku. Postupně ber neterminály od největšího a zpracovávej jejich pravidla tak, že pokud pravidlo začíná neterminálem X, tento neterminál se nahradí všemi pravými stranami pravidel pro X.
   - Největší neterminál v našem uspořádání je B. Po odstranění rekurzí z něj nemohou vést zpětné šipky ani smyčky, takže B nemůže mít pravidlo začínající neterminálem. Pravidla pro B se nemění.
   - Dalším neterminálem je A. A může mít pravidla začínající B. Taková pravidla transformujeme:

$$\begin{aligned} P = \{\ S &\to Aa \mid Bb \mid aaA \mid AaS' \mid BbS' \mid aaAS', \\ S' &\to aA \mid bB \mid aAS' \mid bBS', \\ A &\to ab \mid BbBb \mid aaABb \mid BbS'Bb \mid aaAS'Bb \mid abA' \mid \\ & \quad BbBbA' \mid aaABbA' \mid BbS'BbA' \mid aaAS'BbA', \\ A' &\to Ab \mid aBb \mid aS'Bb \mid AbA' \mid aBbA' \mid aS'BbA', \\ B &\to bAb \mid bAbB', \\ B' &\to bb \mid BB \mid bbB' \mid BBB'\ \} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} P = \{\ S &\to Aa \mid Bb \mid aaA \mid AaS' \mid BbS' \mid aaAS', \\ S' &\to aA \mid bB \mid aAS' \mid bBS', \\ A &\to ab \mid bAbbBb \mid bAbB'bBb \mid aaABb \mid bAbbS'Bb \mid bAbB'bS'Bb \mid aaAS'Bb \mid abA' \mid \\ & \quad bAbBbA' \mid bAbB'bBbA' \mid aaABbA' \mid bAbbS'BbA' \mid bAbB'bS'BbA' \mid aaAS'BbA', \\ A' &\to Ab \mid aBb \mid aS'Bb \mid AbA' \mid aBbA' \mid aS'BbA', \\ B &\to bAb \mid bAbB', \\ B' &\to bb \mid BB \mid bbB' \mid BBB'\ \} \end{aligned}$$



7.10 Odstraňte levou rekurzi a transformujte do GNF

$$G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S), \text{ kde}$$
$$\begin{aligned} P = \{\ S &\rightarrow Aa \mid Bb \mid aaA \mid SaA \mid SbB, \\ A &\rightarrow AAb \mid ab \mid SBb, \\ B &\rightarrow Bbb \mid BBB \mid bAb\ \} \end{aligned}$$

7

II. Transformace do GNF

1. Použij uspořádání z předchozího kroku. Postupně ber neterminály od největšího a zpracovávej jejich pravidla tak, že pokud pravidlo začíná neterminálem X, tento neterminál se nahradí všemi pravými stranami pravidel pro X.
   - … (zpracuj zbylé neterminály)

B'
A'
S'
S
A
B

2. Všechny terminály s výjimkou terminálů na začátcích pravidel nahraď novými neterminály a doplň potřebná pravidla pro nové neterminály
   - Výsledná pravidla pro B: $B \rightarrow bA<b> \mid bA<b>B'$,
     $<b> \rightarrow b$