

# Vyhodnocovací strategie (lenost vs. striktnost)

IB016 Seminář z funkcionálního programování

Fakulta informatiky, Masarykova univerzita

# Líne vyhodnocování: příklad

`fst (1, undefined)  $\rightsquigarrow^*$  1`

- druhá složka dvojice se vůbec nevyhodnotí

# Líné vyhodnocování: příklad

```
fst (1, undefined)  $\rightsquigarrow^*$  1
```

- druhá složka dvojice se vůbec nevyhodnotí

```
let fact n = product [1..n]
```

```
in map fact [1000000, 999999 .. 0] !! 999995  $\rightsquigarrow^*$  120
```

- jednotlivé prvky jsou vypočítány, jen když jsou vyžádány (počítá se jen faktoriál pětky)

## Líné vyhodnocování: příklad

```
fst (1, undefined)  $\rightsquigarrow^*$  1
```

- druhá složka dvojice se vůbec nevyhodnotí

```
let fact n = product [1..n]
```

```
in map fact [1000000, 999999 .. 0] !! 999995  $\rightsquigarrow^*$  120
```

- jednotlivé prvky jsou vypočítány, jen když jsou vyžádány (počítá se jen faktoriál pětky)

```
let fibs = 0:1:zipWith (+) fibs (tail fibs)
```

```
in fibs !! 100  $\rightsquigarrow^*$  354224848179261915075
```

- seznam je konstruován líně, tedy jen prvky, které jsou potřeba
- už jednou vypočítané prvky seznamu se nepočítají znovu

- každá hodnota v Haskellu může být
  - a) vyhodnocená
  - b) nevyhodnocená – tzv. *thunk* – výraz, který lze vyhodnotit
- pokud se snažíme nevypočítanou hodnotu přečíst, vypočítá se
- při příštím čtení je již vypočítaná
- vyhodnocuje se vždy jen to, co je nezbytně nutné
  - jen ty části výrazů, jejichž výsledek je potřeba
  - jen do té hloubky, dokud je to nutné  
(vzpomeňte na [take](#) na nekonečných seznamech)

# Líne vyhodnocování

```
fact n = product [1..n]
facts = map fact [0..]
[]      !! _ = error "(!!): index too large"
(x:_)  !! 0 = x
(_:xs) !! n = xs !! (n - 1)
```

# Líne vyhodnocování

```
fact n = product [1..n]
facts = map fact [0..]
[]      !! _ = error "(!!): index too large"
(x:_)   !! 0 = x
(_:xs)  !! n = xs !! (n - 1)
facts !! 1
```

# Líne vyhodnocování

```
fact n = product [1..n]
facts = map fact [0..]
[]      !! _ = error "(!!): index too large"
(x:_)  !! 0 = x
(_:xs) !! n = xs !! (n - 1)
facts !! 1
    ~> (map fact [0..]) !! 1
```



# Líne vyhodnocování

```
fact n = product [1..n]
facts = map fact [0..]
[]      !! _ = error "(!!): index too large"
(x:_)   !! 0 = x
(_:xs)  !! n = xs !! (n - 1)
facts !! 1
  ~> (map fact [0..]) !! 1
  ~> (map fact (0:[1..])) !! 1
```

# Líne vyhodnocování

```
fact n = product [1..n]
facts = map fact [0..]
[]      !! _ = error "(!!): index too large"
(x:_)   !! 0 = x
(_:xs)  !! n = xs !! (n - 1)
facts !! 1
  ~> (map fact [0..]) !! 1
  ~> (map fact (0:[1..])) !! 1
  ~> (fact 0 : map fact [1..]) !! 1
```

# Líne vyhodnocování

```
fact n = product [1..n]
facts = map fact [0..]
[]      !! _ = error "(!!): index too large"
(x:_)   !! 0 = x
(_:xs)  !! n = xs !! (n - 1)
facts !! 1
  ~> (map fact [0..]) !! 1
  ~> (map fact (0:[1..])) !! 1
  ~> (fact 0 : map fact [1..]) !! 1
  ~> (map fact [1..]) !! (1 - 1)
```

# Líne vyhodnocování

```
fact n = product [1..n]
facts = map fact [0..]
[]      !! _ = error "(!!): index too large"
(x:_)  !! 0 = x
(_:xs) !! n = xs !! (n - 1)
facts !! 1
  ~> (map fact [0..]) !! 1
  ~> (map fact (0:[1..])) !! 1
  ~> (fact 0 : map fact [1..]) !! 1
  ~> (map fact [1..]) !! (1 - 1)
  ~> (map fact (1:[2..])) !! (1 - 1)
```

# Líné vyhodnocování

```
fact n = product [1..n]
facts = map fact [0..]
[]      !! _ = error "(!!): index too large"
(x:_)  !! 0 = x
(_:xs) !! n = xs !! (n - 1)
facts !! 1
  ~> (map fact [0..]) !! 1
  ~> (map fact (0:[1..])) !! 1
  ~> (fact 0 : map fact [1..]) !! 1
  ~> (map fact [1..]) !! (1 - 1)
  ~> (map fact (1:[2..])) !! (1 - 1)
  ~> (fact 1 : map fact [2..]) !! (1 - 1)
```

# Líne vyhodnocování

```
fact n = product [1..n]
facts = map fact [0..]
[]      !! _ = error "(!!): index too large"
(x:_)   !! 0 = x
(_:xs)  !! n = xs !! (n - 1)
facts !! 1
  ~> (map fact [0..]) !! 1
  ~> (map fact (0:[1..])) !! 1
  ~> (fact 0 : map fact [1..]) !! 1
  ~> (map fact [1..]) !! (1 - 1)
  ~> (map fact (1:[2..])) !! (1 - 1)
  ~> (fact 1 : map fact [2..]) !! (1 - 1)
  ~> (fact 1 : map fact [2..]) !! 0
```

# Líne vyhodnocování

```
fact n = product [1..n]
facts = map fact [0..]
[]      !! _ = error "(!!): index too large"
(x:_)   !! 0 = x
(_:xs)  !! n = xs !! (n - 1)
facts !! 1
  ~> (map fact [0..]) !! 1
  ~> (map fact (0:[1..])) !! 1
  ~> (fact 0 : map fact [1..]) !! 1
  ~> (map fact [1..]) !! (1 - 1)
  ~> (map fact (1:[2..])) !! (1 - 1)
  ~> (fact 1 : map fact [2..]) !! (1 - 1)
  ~> (fact 1 : map fact [2..]) !! 0
  ~> fact 1 ~> product [1..1] ~>* 1
```

# Striktnost a lenost

```
selectsort :: Ord a => [a] -> [a]
selectsort [] = []
selectsort xs = min : selectsort (withoutMin xs)
  where
    min = minimum xs
    withoutMin (y:ys)
      | y == min = ys
      | otherwise = y : withoutMin ys
```



# Striktnost a lenost

```
selectsort :: Ord a => [a] -> [a]
selectsort [] = []
selectsort xs = min : selectsort (withoutMin xs)
  where
    min = minimum xs
    withoutMin (y:ys)
      | y == min = ys
      | otherwise = y : withoutMin ys
```

- striktní vzhledem ke struktuře seznamu (vyžaduje vyhodnotit seznam až po [])
- vyhodnotí všechny prvky až do té míry jak vyžaduje (<)
- ale produkuje výstup líně!

# Striktnost a lenost

```
selectsort :: Ord a => [a] -> [a]
selectsort [] = []
selectsort xs = min : selectsort (withoutMin xs)
  where
    min = minimum xs
    withoutMin (y:ys)
      | y == min = ys
      | otherwise = y : withoutMin ys
```

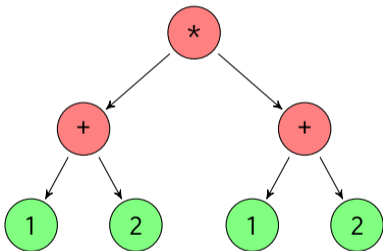
- striktní vzhledem ke struktuře seznamu (vyžaduje vyhodnotit seznam až po [])
- vyhodnotí všechny prvky až do té míry jak vyžaduje (<)
- ale produkuje výstup líně!
  - jaká je složitost `head (selectsort [10000,9999..0])`?

# Striktnost a lenost

```
selectsort :: Ord a => [a] -> [a]
selectsort [] = []
selectsort xs = min : selectsort (withoutMin xs)
  where
    min = minimum xs
    withoutMin (y:ys)
      | y == min = ys
      | otherwise = y : withoutMin ys
```

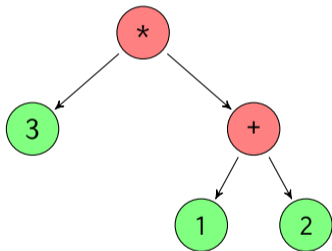
- striktní vzhledem ke struktuře seznamu (vyžaduje vyhodnotit seznam až po [])
- vyhodnotí všechny prvky až do té míry jak vyžaduje (<)
- ale produkuje výstup líně!
  - jaká je složitost `head (selectsort [10000,9999..0])`?
  - $O(n)$

$(1 + 2) * (1 + 2)$



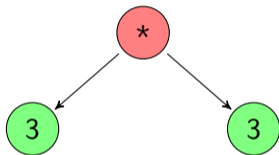
# Sdílení podvýrazů

$$(1 + 2) * (1 + 2) \rightsquigarrow 3 * (1 + 2)$$



# Sdílení podvýrazů

$$(1 + 2) * (1 + 2) \rightsquigarrow 3 * (1 + 2)$$
$$\rightsquigarrow 3 * 3$$



# Sdílení podvýrazů

$$(1 + 2) * (1 + 2) \rightsquigarrow 3 * (1 + 2)$$
$$\rightsquigarrow 3 * 3 \rightsquigarrow 9$$

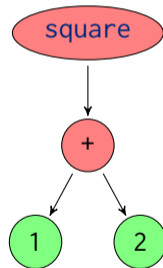
9

# Sdílení podvýrazů

$$(1 + 2) * (1 + 2) \rightsquigarrow 3 * (1 + 2)$$
$$\rightsquigarrow 3 * 3 \rightsquigarrow 9$$

9

square a = a \* a square (1 + 2)





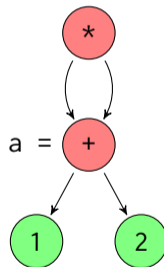
# Sdílení podvýrazů

$$(1 + 2) * (1 + 2) \rightsquigarrow 3 * (1 + 2)$$
$$\rightsquigarrow 3 * 3 \rightsquigarrow 9$$

9

square a = a \* a square (1 + 2)

$$\rightsquigarrow (1 + 2) * (1 + 2)$$

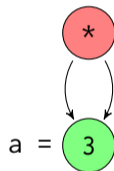


# Sdílení podvýrazů

$$(1 + 2) * (1 + 2) \rightsquigarrow 3 * (1 + 2) \\ \rightsquigarrow 3 * 3 \rightsquigarrow 9$$

9

$$\text{square } a = a * a \text{ square } (1 + 2) \\ \rightsquigarrow (1 + 2) * (1 + 2) \rightsquigarrow 3 * 3$$



# Sdílení podvýrazů

$$(1 + 2) * (1 + 2) \rightsquigarrow 3 * (1 + 2)$$
$$\rightsquigarrow 3 * 3 \rightsquigarrow 9$$

9

$$\text{square } a = a * a \text{ square } (1 + 2)$$
$$\rightsquigarrow (1 + 2) * (1 + 2) \rightsquigarrow 3 * 3$$
$$\rightsquigarrow 9$$

9

# Sdílení podvýrazů

$$(1 + 2) * (1 + 2) \rightsquigarrow 3 * (1 + 2)$$

$$\rightsquigarrow 3 * 3 \rightsquigarrow 9$$

9

$$\text{square } a = a * a \text{ square } (1 + 2)$$

$$\rightsquigarrow (1 + 2) * (1 + 2) \rightsquigarrow 3 * 3$$

$$\rightsquigarrow 9$$

9

= grafová redukce (graph reduction)

# Sdílení v GHCi

- standardně GHCi vypisuje hodnoty pomocí `print`, což obvykle způsobuje plné vyhodnocení
- pomocí `:sprint` lze vypsát bez vynucení vyhodnocení
- pozor, polymorfní výrazy se vyhodnocují vždy znovu

# Sdílení v GHCi

- standardně GHCi vypisuje hodnoty pomocí `print`, což obvykle způsobuje plné vyhodnocení
- pomocí `:sprint` lze vypsát bez vynucení vyhodnocení
- pozor, polymorfní výrazy se vyhodnocují vždy znovu

```
> f a = [a, 1, 2] ++ [3, a, 4]
```

```
> xs = f (5 + 2 :: Int)
```

```
> :sprint xs
```

```
xs = _           -- xs je thunk (nevyhodnocený výraz)
```

```
> head xs
```

```
7
```

```
> :sprint xs
```

```
xs = 7 : _       -- očásek xs se zatím nevyhodnotil
```

```
> length xs
```

```
6
```

```
> :sprint xs
```

```
xs = [7, 1, 2, 3, 1, 4]
```

# Teoretická vsuvka: vyhodnocovací strategie

## Striktní vyhodnocovací strategie

- výrazy vyhodnoceny při přiřazení do proměnných
- argumenty vyhodnoceny před voláním
- pořadí vyhodnocování obvykle do značné míry jasné ze zdrojového kódu
- typické pro imperativní jazyky, ale i mnohé funkcionální (\*ML)

```
head (take (2 + 2) [1..10])
```

```
  ~>* head (take 4 [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10])
```

```
  ~>* head [1, 2, 3, 4]
```

```
  ~>* 1
```

# Teoretická vsuvka: vyhodnocovací strategie

## Normální/nestriktní vyhodnocovací strategie

- výrazy se vyhodnocují, až když jsou potřeba
- umožňuje existenci potenciálně nekonečných datových struktur
- pořadí vyhodnocení méně viditelné
- může mít větší spotřebu paměti (nevyhodnocené výrazy)

```
head (take (2 + 2) [1..10])  
  ~>* head (take 4 (1 : [2..10]))  
  ~>* head (1 : take 3 [2..10])  
  ~>* 1
```



# Teoretická vsuvka: vyhodnocovací strategie

## Normální/nestriktní vyhodnocovací strategie

- výrazy se vyhodnocují, až když jsou potřeba
- umožňuje existenci potenciálně nekonečných datových struktur
- pořadí vyhodnocení méně viditelné
- může mít větší spotřebu paměti (nevyhodnocené výrazy)

```
head (take (2 + 2) [1..10])  
  ~>* head (take 4 (1 : [2..10]))  
  ~>* head (1 : take 3 [2..10])  
  ~>* 1
```

## Líná vyhodnocovací strategie

- normální + sdílení podvýrazů

## **Churchova–Rosserova věta**

Výsledná hodnota ukončeného výpočtu výrazu nezáleží na redukční strategii: pokud výpočet skončí, je jeho výsledek vždy stejný.

## **Věta o normalizaci**

Jestliže pro nějaký výraz  $M$  existuje redukční strategie, s jejímž použitím se úprava výrazu  $M$  nezacyklí, pak se tento výpočet nezacyklí ani s použitím normální (či líné) redukční strategie.

# Teoretická vsuvka: produktivní algoritmy

- u algoritmů, které vracejí konečné datové struktury, nás zajímá, zda skončí
- pokud ale produkují nekonečné datové struktury, tak jistě neskončí
- neskončení ale může být různé:
  - `repeat x = x : repeat x`
  - `inf x = inf x`

# Teoretická vsuvka: produktivní algoritmy

- u algoritmů, které vracejí konečné datové struktury, nás zajímá, zda skončí
- pokud ale produkují nekonečné datové struktury, tak jistě neskončí
- neskončení ale může být různé:
  - `repeat x = x : repeat x`
  - `inf x = inf x`
- výraz je **produktivní**, pokud
  - ho lze plně vyhodnotit v konečném čase
  - je možné výsledek získaný po libovolném konečném počtu kroků rozebrat pomocí vzorů (provést pattern matching) a takto získané podvýrazy jsou opět produktivní
- funkce je produktivní, jestliže každý výraz, který vznikne její aplikací na produktivní výrazy, je produktivní

# Teoretická vsuvka: produktivní algoritmy

- u algoritmů, které vracejí konečné datové struktury, nás zajímá, zda skončí
- pokud ale produkují nekonečné datové struktury, tak jistě neskončí
- neskončení ale může být různé:
  - `repeat x = x : repeat x`
  - `inf x = inf x`
- výraz je **produktivní**, pokud
  - ho lze plně vyhodnotit v konečném čase
  - je možné výsledek získaný po libovolném konečném počtu kroků rozebrat pomocí vzorů (provést pattern matching) a takto získané podvýrazy jsou opět produktivní
- funkce je produktivní, jestliže každý výraz, který vznikne její aplikací na produktivní výrazy, je produktivní
  - `inf 42`

# Teoretická vsuvka: produktivní algoritmy

- u algoritmů, které vracejí konečné datové struktury, nás zajímá, zda skončí
- pokud ale produkují nekonečné datové struktury, tak jistě neskončí
- neskončení ale může být různé:
  - `repeat x = x` : `repeat x`
  - `inf x = inf x`
- výraz je **produktivní**, pokud
  - ho lze plně vyhodnotit v konečném čase
  - je možné výsledek získaný po libovolném konečném počtu kroků rozebrat pomocí vzorů (provést pattern matching) a takto získané podvýrazy jsou opět produktivní
- funkce je produktivní, jestliže každý výraz, který vznikne její aplikací na produktivní výrazy, je produktivní
  - `inf 42` není produktivní
  - `repeat 42`

# Teoretická vsuvka: produktivní algoritmy

- u algoritmů, které vracejí konečné datové struktury, nás zajímá, zda skončí
- pokud ale produkují nekonečné datové struktury, tak jistě neskončí
- neskončení ale může být různé:
  - `repeat x = x` : `repeat x`
  - `inf x = inf x`
- výraz je **produktivní**, pokud
  - ho lze plně vyhodnotit v konečném čase
  - je možné výsledek získaný po libovolném konečném počtu kroků rozebrat pomocí vzorů (provést pattern matching) a takto získané podvýrazy jsou opět produktivní
- funkce je produktivní, jestliže každý výraz, který vznikne její aplikací na produktivní výrazy, je produktivní
  - `inf 42` není produktivní
  - `repeat 42` je produktivní
  - `[1..10] ++ inf 42`

# Teoretická vsuvka: produktivní algoritmy

- u algoritmů, které vracejí konečné datové struktury, nás zajímá, zda skončí
- pokud ale produkují nekonečné datové struktury, tak jistě neskončí
- neskončení ale může být různé:
  - `repeat x = x` : `repeat x`
  - `inf x = inf x`
- výraz je **produktivní**, pokud
  - ho lze plně vyhodnotit v konečném čase
  - je možné výsledek získaný po libovolném konečném počtu kroků rozebrat pomocí vzorů (provést pattern matching) a takto získané podvýrazy jsou opět produktivní
- funkce je produktivní, jestliže každý výraz, který vznikne její aplikací na produktivní výrazy, je produktivní
  - `inf 42` není produktivní
  - `repeat 42` je produktivní
  - `[1..10] ++ inf 42` není produktivní



## Vzory, ovlivňování lenosti

# Vzory vynucují vyhodnocení

f1, f2, f3 :: [a] -> ()

f1 \_ = ()

f2 (\_:\_) = ()

f3 (\_:\_:[]) = ()

f1 undefined  $\rightsquigarrow^*$

# Vzory vynucují vyhodnocení

$f1, f2, f3 :: [a] \rightarrow ()$

$f1 \_ = ()$

$f2 (\_:\_) = ()$

$f3 (\_:\_:[]) = ()$

$f1 \text{ undefined} \rightsquigarrow^* ()$

# Vzory vynucují vyhodnocení

f1, f2, f3 :: [a] -> ()

f1 \_ = ()

f2 (\_:\_) = ()

f3 (\_:\_:[]) = ()

f1 undefined  $\rightsquigarrow^*$  ()

f2 undefined  $\rightsquigarrow^*$

# Vzory vynucují vyhodnocení

```
f1, f2, f3 :: [a] -> ()
```

```
f1 _ = ()
```

```
f2 (_:_) = ()
```

```
f3 (_:_:[]) = ()
```

```
f1 undefined  $\rightsquigarrow^*$  ()
```

```
f2 undefined  $\rightsquigarrow^*$  *** Exception: Prelude.undefined
```

# Vzory vynucují vyhodnocení

```
f1, f2, f3 :: [a] -> ()
```

```
f1 _ = ()
```

```
f2 (_:_) = ()
```

```
f3 (_:_:[]) = ()
```

```
f1 undefined  $\rightsquigarrow^*$  ()
```

```
f2 undefined  $\rightsquigarrow^*$  *** Exception: Prelude.undefined
```

```
f1 []  $\rightsquigarrow^*$ 
```

# Vzory vynucují vyhodnocení

```
f1, f2, f3 :: [a] -> ()
```

```
f1 _ = ()
```

```
f2 (_:_) = ()
```

```
f3 (_:_:[]) = ()
```

```
f1 undefined  $\rightsquigarrow^*$  ()
```

```
f2 undefined  $\rightsquigarrow^*$  *** Exception: Prelude.undefined
```

```
f1 []  $\rightsquigarrow^*$  ()
```

# Vzory vynucují vyhodnocení

`f1, f2, f3 :: [a] -> ()`

`f1 _ = ()`

`f2 (_:_) = ()`

`f3 (_:_:[]) = ()`

`f1 undefined  $\rightsquigarrow^*$  ()`

`f2 undefined  $\rightsquigarrow^*$  *** Exception: Prelude.undefined`

`f1 []  $\rightsquigarrow^*$  ()`

`f2 []  $\rightsquigarrow^*$`



# Vzory vynucují vyhodnocení

```
f1, f2, f3 :: [a] -> ()
```

```
f1 _ = ()
```

```
f2 (_:_) = ()
```

```
f3 (_:_:[]) = ()
```

```
f1 undefined  $\rightsquigarrow^*$  ()
```

```
f2 undefined  $\rightsquigarrow^*$  *** Exception: Prelude.undefined
```

```
f1 []  $\rightsquigarrow^*$  ()
```

```
f2 []  $\rightsquigarrow^*$  *** Exception: ...
```

# Vzory vynucují vyhodnocení

$f1, f2, f3 :: [a] \rightarrow ()$

$f1 \_ = ()$

$f2 (\_:\_) = ()$

$f3 (\_:\_:[]) = ()$

$f1 \text{ undefined} \rightsquigarrow^* ()$

$f2 \text{ undefined} \rightsquigarrow^* \text{*** Exception: Prelude.undefined}$

$f1 [] \rightsquigarrow^* ()$

$f2 [] \rightsquigarrow^* \text{*** Exception: ...}$

$f2 [\text{undefined}, \text{undefined}] \rightsquigarrow^*$

# Vzory vynucují vyhodnocení

f1, f2, f3 :: [a] -> ()

f1 \_ = ()

f2 (\_:\_) = ()

f3 (\_:\_:[]) = ()

f1 undefined  $\rightsquigarrow^*$  ()

f2 undefined  $\rightsquigarrow^*$  \*\*\* **Exception: Prelude.undefined**

f1 []  $\rightsquigarrow^*$  ()

f2 []  $\rightsquigarrow^*$  \*\*\* **Exception: ...**

f2 [undefined,undefined]  $\rightsquigarrow^*$  ()

# Vzory vynucují vyhodnocení

f1, f2, f3 :: [a] -> ()

f1 \_ = ()

f2 (\_:\_) = ()

f3 (\_:\_:[]) = ()

f1 undefined  $\rightsquigarrow^*$  ()

f2 undefined  $\rightsquigarrow^*$  \*\*\* **Exception: Prelude.undefined**

f1 []  $\rightsquigarrow^*$  ()

f2 []  $\rightsquigarrow^*$  \*\*\* **Exception: ...**

f2 [undefined,undefined]  $\rightsquigarrow^*$  ()

f3 [undefined,undefined]  $\rightsquigarrow^*$

# Vzory vynucují vyhodnocení

```
f1, f2, f3 :: [a] -> ()
```

```
f1 _ = ()
```

```
f2 (_:_) = ()
```

```
f3 (_:_:[]) = ()
```

```
f1 undefined  $\rightsquigarrow^*$  ()
```

```
f2 undefined  $\rightsquigarrow^*$  *** Exception: Prelude.undefined
```

```
f1 []  $\rightsquigarrow^*$  ()
```

```
f2 []  $\rightsquigarrow^*$  *** Exception: ...
```

```
f2 [undefined,undefined]  $\rightsquigarrow^*$  ()
```

```
f3 [undefined,undefined]  $\rightsquigarrow^*$  ()
```

# Vzory vynucují vyhodnocení

f1, f2, f3 :: [a] -> ()

f1 \_ = ()

f2 (\_:\_) = ()

f3 (\_:\_:[]) = ()

f1 undefined  $\rightsquigarrow^*$  ()

f2 undefined  $\rightsquigarrow^*$  \*\*\* **Exception: Prelude.undefined**

f1 []  $\rightsquigarrow^*$  ()

f2 []  $\rightsquigarrow^*$  \*\*\* **Exception: ...**

f2 [undefined,undefined]  $\rightsquigarrow^*$  ()

f3 [undefined,undefined]  $\rightsquigarrow^*$  ()

f2 (undefined:undefined)  $\rightsquigarrow^*$

# Vzory vynucují vyhodnocení

f1, f2, f3 :: [a] -> ()

f1 \_ = ()

f2 (\_:\_) = ()

f3 (\_:\_:[]) = ()

f1 undefined  $\rightsquigarrow^*$  ()

f2 undefined  $\rightsquigarrow^*$  \*\*\* **Exception: Prelude.undefined**

f1 []  $\rightsquigarrow^*$  ()

f2 []  $\rightsquigarrow^*$  \*\*\* **Exception: ...**

f2 [undefined,undefined]  $\rightsquigarrow^*$  ()

f3 [undefined,undefined]  $\rightsquigarrow^*$  ()

f2 (undefined:undefined)  $\rightsquigarrow^*$  ()

# Vzory vynucují vyhodnocení

f1, f2, f3 :: [a] -> ()

f1 \_ = ()

f2 (\_:\_) = ()

f3 (\_:\_:[]) = ()

f1 undefined  $\rightsquigarrow^*$  ()

f2 undefined  $\rightsquigarrow^*$  \*\*\* **Exception: Prelude.undefined**

f1 []  $\rightsquigarrow^*$  ()

f2 []  $\rightsquigarrow^*$  \*\*\* **Exception: ...**

f2 [undefined,undefined]  $\rightsquigarrow^*$  ()

f3 [undefined,undefined]  $\rightsquigarrow^*$  ()

f2 (undefined:undefined)  $\rightsquigarrow^*$  ()

f3 (undefined:undefined)  $\rightsquigarrow^*$



# Vzory vynucují vyhodnocení

$f1, f2, f3 :: [a] \rightarrow ()$

$f1 \_ = ()$

$f2 (\_:\_) = ()$

$f3 (\_:\_:[]) = ()$

$f1 \text{ undefined} \rightsquigarrow^* ()$

$f2 \text{ undefined} \rightsquigarrow^* *** \text{ Exception: Prelude.undefined}$

$f1 [] \rightsquigarrow^* ()$

$f2 [] \rightsquigarrow^* *** \text{ Exception: ...}$

$f2 [\text{undefined}, \text{undefined}] \rightsquigarrow^* ()$

$f3 [\text{undefined}, \text{undefined}] \rightsquigarrow^* ()$

$f2 (\text{undefined}:\text{undefined}) \rightsquigarrow^* ()$

$f3 (\text{undefined}:\text{undefined}) \rightsquigarrow^* *** \text{ Exception: ...}$

# Vzory vynucují vyhodnocení

`f1, f2, f3 :: [a] -> ()`

`f1 _ = ()`

`f2 (_:_) = ()`

`f3 (_:_:[]) = ()`

`f1 undefined ~>* ()`

`f2 undefined ~>* *** Exception: Prelude.undefined`

`f1 [] ~>* ()`

`f2 [] ~>* *** Exception: ...`

`f2 [undefined,undefined] ~>* ()`

`f3 [undefined,undefined] ~>* ()`

`f2 (undefined:undefined) ~>* ()`

`f3 (undefined:undefined) ~>* *** Exception: ...`

- Argument se vyhodnocuje jen do hloubky nezbytně nutné k rozhodnutí, zda hodnota odpovídá vzoru.

- Vlnovkou před vzorem lze odložit pattern matching až do doby, kdy se nějaký argument navázaný vzorem použije.
- Takový vzor nevynucuje vyhodnocení a vždy uspěje.
- Srovnejte:

```
strict, lazy :: Bool -> Maybe Int -> Int
strict b (Just x) = if b then x else 0
lazy b ~(Just x) = if b then x else 0
```

- Vlnovkou před vzorem lze odložit pattern matching až do doby, kdy se nějaký argument navázaný vzorem použije.
- Takový vzor nevynucuje vyhodnocení a vždy uspěje.
- Srovnajte:

```
strict, lazy :: Bool -> Maybe Int -> Int
```

```
strict b (Just x) = if b then x else 0
```

```
lazy b ~(Just x) = if b then x else 0
```

```
strict False Nothing ~>* ???
```

```
lazy False Nothing ~>* ???
```

```
lazy True Nothing ~>* ???
```

- $f \sim(x, y) = g \ x \ y$  se přeloží na (něco jako)  $f \ p = g \ (fst \ p) \ (snd \ p)$
- v **do**-notaci potlačuje navíc požadavek na **MonadFail**:  
`~(x:xs) <- listOf1 arbitrary`  
(fragment generátoru pro QuickCheck, `listOf1` generuje neprázdné seznamy)

# seq vynucuje vyhodnocení

Funkce `seq :: a -> b -> b`

- `a `seq` b` zaručuje, že `a` bude vyhodnoceno, a vrátí `b`
- k vyhodnocení dojde až když něco vynutí výpočet výrazu `a `seq` b`
- nevyhodnocuje `a` plně, nýbrž jen po nejvyšší konstruktor:  
`(undefined, undefined) `seq` 1 ~>* 1`  
`undefined `seq` 1 ~>* *** Exception: ...`

# seq vynucuje vyhodnocení

Funkce `seq :: a -> b -> b`

- `a `seq` b` zaručuje, že `a` bude vyhodnoceno, a vrátí `b`
- k vyhodnocení dojde až když něco vynutí výpočet výrazu `a `seq` b`
- nevyhodnocuje `a` plně, nýbrž jen po nejvyšší konstruktor:  
`(undefined, undefined) `seq` 1 ~>* 1`  
`undefined `seq` 1 ~>* *** Exception: ...`

Striktní aplikace (`$!`) :: `(a -> b) -> a -> b`

- obdoba (`$`), ale vynutí vyhodnocení argumentu před aplikací
- `f1 $! undefined ~>* *** Exception: ...`

## ★ Weak head normal form

`seq` vynucuje vyhodnocení pouze do tzv. *weak head normal form*:

- po nejvyšší (i část. aplik.) hodnotový konstruktor, nebo
- dokud výraz není  $\lambda$ -abstrakce, nebo
- dokud výraz není nedostatečně aplikovanou vestavěnou funkcí.

Příklady výrazů a jejich WHNF:

- `replicate 3 'A'  $\rightsquigarrow$  (:) 'A'` (`replicate (3-1) 'A'`)
- `replicate 3  $\rightsquigarrow$  \x -> x` : `replicate (3-1) x`
- `head  $\rightsquigarrow$  \ (x:xs) -> x`
- `(\x -> if x then Right else Left) (4 < 3)  $\rightsquigarrow$  Left`
- **Just** (`replicate 3 'A'`) už je ve WHNF
- (+) (`4 * 5`) už je ve WHNF (uvažujeme-li vestavěné plus)



# Proč striktnost?

- striktní výpočet může být rychlejší, paměťově efektivnější

```
> :set +s
```

```
(0.18 secs, 74075592 bytes)
```

```
> const () $! product [1..100000]
```

```
()
```

```
(18.32 secs, 9052106864 bytes)
```

```
> :m + Data.List
```

```
> const () $! foldl' (*) 1 [1..100000]
```

```
()
```

```
(2.73 secs, 9045968328 bytes)
```

- `foldl'` je striktní verze `foldl`

# Proč striktnost?

```
readFiles :: [FilePath] -> IO [String]
```

```
readFiles paths = mapM readfile paths
```

- `readfile` vrací obsah souboru líně
- soubor je zavřen, až když je dočten na konec!
- lehce můžeme překročit limit na množství otevřených souborů
- `seq` nepomůže

# Control.DeepSeq

Úplné/hluboké vyhodnocení.

```
import Control.DeepSeq
```

```
readFiles :: [FilePath] -> IO [String]
readFiles paths = forM paths $ \p ->
  withFile p ReadMode $ \h -> do
    c <- hGetContents h
    return $!! c
```

- `($!!) :: NFData a => (a -> b) -> a -> b`  
plně vyhodnotí argument, pak aplikuje funkci
- `deepseq :: NFData a => a -> b -> b`
- `class NFData a where`  
    `rnf :: a -> ()`  
plně vyhodnotí argument

```
import Control.DeepSeq
```

```
data BinTree a = Empty  
               | Node a (BinTree a) (BinTree a)  
               deriving (Show, Eq)
```

```
instance NFData a => NFData (BinTree a) where  
  rnf Empty = ()  
  rnf (Node v t1 t2) = rnf v `seq` rnf t1 `seq`  
                      rnf t2
```

# Rozšíření BangPatterns

```
{-# LANGUAGE BangPatterns #-}
```

Umožňuje snadno vynutit striktnost u vzoru, výrazu **let**, argumentu hodnotového konstruktora.

```
data Tuple a b = Tuple !a !b
```

```
lazy, strict :: a -> ()
```

```
lazy _ = ()
```

```
strict !_ = ()
```

- taková hodnota je pak před aplikací funkce/konstruktora vyhodnocena do WHNF (po první konstruktor)
- v **let** způsobí vyhodnocení příslušného výrazu před započítím vyhodnocování části **in** (striktní **let**)  
 $(\$!) :: (a \rightarrow b) \rightarrow a \rightarrow b$   
 $(\$!) f x = \mathbf{let} !ex = x \mathbf{in} f ex$

```
{-# LANGUAGE StrictData #-}
```

- jako by všechna pole v datových definicích v *daném modulu* byla definována pomocí ! (z rozšíření BangPatterns)
- lenost může být vynucena vlnovkou (**data T = D ~Int**)

# Rozšíření StrictData a Strict

```
{-# LANGUAGE StrictData #-}
```

- jako by všechna pole v datových definicích v *daném modulu* byla definována pomocí ! (z rozšíření BangPatterns)
- lenost může být vynucena vlnovkou (**data T = D ~Int**)

```
{-# LANGUAGE Strict #-}
```

- obsahuje StrictData
- argumenty funkcí, definice **where/let**, vazby v **case/do** jsou také striktní
- vnořené vzory a top-level definice nadále striktní nejsou

# Rozšíření StrictData a Strict

```
{-# LANGUAGE StrictData #-}
```

- jako by všechna pole v datových definicích v *daném modulu* byla definována pomocí ! (z rozšíření BangPatterns)
- lenost může být vynucena vlnovkou (**data T = D ~Int**)

```
{-# LANGUAGE Strict #-}
```

- obsahuje StrictData
- argumenty funkcí, definice **where/let**, vazby v **case/do** jsou také striktní
- vnořené vzory a top-level definice nadále striktní nejsou

[https://downloads.haskell.org/~ghc/latest/docs/html/users\\_guide/ghc\\_extensions.html#extension-StrictData](https://downloads.haskell.org/~ghc/latest/docs/html/users_guide/ghc_extensions.html#extension-StrictData)



- **Data.List**: `foldl'`, `foldl1'` – akumulátorem je jediná, vždy vyhodnocená hodnota namísto potenciálně obrovského thunku (nevyhodnoceného výrazu).
- **Data.Map.Lazy** – *klíče* se vyhodnocují striktně (ukládají se už vyhodnocené pro rychlejší vyhledávání).
- **Data.Map.Strict** – *klíče i hodnoty* se ukládají vyhodnocené.
- ★ Pokročilé věci související s transformátory monád a **ST**.

- zkrácené vyhonocování logických výrazů ve většině jazyků (včetně vedlejších efektů!)

- zkrácené vyhonocování logických výrazů ve většině jazyků (včetně vedlejších efektů!)
- iterátory se mohou chovat líně (map/filter/... v Pythonu, C++ ranges, C# LINQ, ...)

- zkrácené vyhonocování logických výrazů ve většině jazyků (včetně vedlejších efektů!)
- iterátory se mohou chovat líně (map/filter/... v Pythonu, C++ ranges, C# LINQ, ...)
- future/promise – často mohou běžet paralelně, či podle potřeby (líně)

Naprogramujte variantu ohodnocených binárních stromů se striktními hodnotami (**StrictValTree**), ale línou reprezentací stromové struktury, a variantu, která je plně striktní jak ve struktuře tak v hodnotách (**StrictTree**).

- rozmyslete si, pro jaké použití by se mohly jednotlivé varianty hodit a kdy byste naopak použili línou variantu
- rozmyslete si, jaké prostředky z tohoto cvičení chcete použít pro vynucení striktnosti v jednotlivých případech a proč
- pro obě verze stromů implementujte instanci **Functor**