

5. cvičení z MB141, jaro 2023

Příklad 1. Řešte soustavu rovnic s neznámými v \mathbb{R}

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 &= -8 \\2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 &= 1 \\x_1 + x_3 - x_4 + 2x_5 &= 0 \\x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 0\end{aligned}$$

Řešte stejnou soustavu v \mathbb{Z}_{13} , zbytkových třídách modulo 13.

Řešení. V \mathbb{R} nemá řešení. V \mathbb{Z}_{13} má více řešení. □

Příklad 2. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= 0 \\2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 2x_5 &= 0 \\2x_1 + x_3 - x_4 + 2x_5 &= -1 \\x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 &= 1\end{aligned}$$

Řešení. $[-1, 0, 1, 0, 0] + s(0, 0, 1, 1, 0) + t(-1, 0, 0, 0, 1)$

http://www.math.muni.cz/xfrancirekp/vyuka/seste_cviceni/sedme_cviceni.pdf □

Příklad 3. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned}2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\2x_1 - x_2 - 3x_4 &= 2 \\3x_1 - x_3 + x_4 &= -3 \\2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 &= -6\end{aligned}$$

Příklad 4. Zjistěte, zda jde matice násobit, a pokud ano, vynásobte je.

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 & 7 \\ -2 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -1 & -5 \\ 9 & 11 \end{pmatrix}, & \quad \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -1 & -5 \\ 9 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 & 7 \\ -2 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \\(2 \ 8 \ 3 \ 21 \ 5) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 9 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}, & \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 9 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot (2 \ 8 \ 3 \ 21 \ 5)\end{aligned}$$

Příklad 5. Uvažujme matici

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 & 7 \\ -2 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

a označme písmenem e postupně tyto elementární řádkové operace

- a) vynásobení druhého řádku číslem 3,
- b) výměna prvního a třetího řádku,

c) k třetímu řádku přičteme dvojnásobek prvního řádku.

Nechť E je jednotková matice 3×3 . Označme $e(A)$ a $e(E)$ matice, které vzniknou aplikací elementární řádkové operace e na matici A a E . Ukažte, že platí

$$e(E) \cdot A = e(A).$$

Příklad. 6. Matice A a B tvaru $n \times n$ jsou dány předpisem:

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } i \geq j, \\ 2, & \text{if } i < j, \end{cases} \quad B_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } i \leq j, \\ 3, & \text{if } i > j. \end{cases}$$

Napište je a vypočtěte, čemu se rovná jejich součin.

Příklad. 7. Spočtěte inverzní matici k matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Proveďte zkoušku.

Příklad. 8. Spočtěte inverzní matici k matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 & -2 \\ -1 & -6 & -11 & 4 \\ 0 & -1 & -6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zkoušku proveďte aspoň částečně.

Řešení. Inverzní matice je

$$\begin{pmatrix} 154 & -179 & -205 & 235 \\ -36 & 42 & 48 & -55 \\ 6 & -7 & -8 & 9 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

□