6. cvičení z MB141, jaro 2023

Příklad. 1. Spočtěte inverzní matici k matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Proveďte zkoušku.

Příklad. 2. Spočtěte inverzní matici k matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 & -2 \\ -1 & -6 & -11 & 4 \\ 0 & -1 & -6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zkoušku proveďte aspoň částečně.

Řešení. Inverzní matice je

$$\begin{pmatrix} 154 & -179 & -205 & 235 \\ -36 & 42 & 48 & -55 \\ 6 & -7 & -8 & 9 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Příklad. 3. Spočtěte inverzní matici k matici

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proveďte zkoušku.

Příklad. 4. Spočtěte determinant nějaké matice 2×2 a 3×3.

Příklad. 5. Spočtěte determinant matice

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) pomocí řádkových úprav,
b) pomocí Laplaceova rozvoje vhodného řádku.

Řešení. 32 $\square$

Příklad. 6. Zjistěte, pro které parametry a, b, $c \in \mathbb{R}$ je soustava rovnic

$$\begin{array}{ccccccc} ax_1 & + & bx_2 & & & = & c \\ cx_1 & & & + & ax_3 & = & b \\ & & cx_2 & + & bx_3 & = & a \end{array}$$

jednoznačně řešitelná. Pro tyto parametry najděte řešení pomocí Cramerova pravidla.

Příklad. 7. Spočtěte determinant matice

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

pomocí řádkových úprav.

Řešení. Začneme tím, že k prvému řádku přičteme všechny ostatní. Pak pokračujeme standardními úpravami. Výsledek je $(a+4)(a-1)^4$. $\square$

Příklad. 8. Ukažte si, že následující množiny jsou jsou s vhodnými operacemi vektorové prostory.

(a) množina všech polynomů s koeficienty v $\mathbb{R}$, označení $\mathbb{R}[x]$,
(b) množina všech matic 3×3 s prvky v $\mathbb{Z}_5$, označení $\mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{Z}_5)$,
(c) množina všech posloupností reálných čísel, kterou lze chápat jako množinu všech zobrazení množiny přirozených čísel $\mathbb{N}$ do $\mathbb{R}$.

Příklad. 9. Zjistěte, zda následující podmnožiny jsou vektorové podprostory ve vyznačených vektorových prostorech:

(a) $U = \{f \in \mathbb{R}[x] |\ f(3) = 0,\ f(-1) = 0\} \subset \mathbb{R}[x]$,
(b) $V = \{A \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) |\ a_{11} + a_{22} = 1\} \subset \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$,
(c) $W = \{A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) |\ \det A = 0\} \subset \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$,
(d) $Z = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} |\ f(n+1) = f(n) + f(n-1)\} \subset \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\}$.