8. cvičení z MB141, jaro 2023

Vyřešte aspoň příklady 1, 2, 3, 4, 6. Další úlohy dělejte v pořadí 8 (stačí výpočet vlastních čísel a jednoho vlastního vektoru), 7 a 5 (v něm jsou vlastní čísla komplexní. Reálné vlastní vektory neexistují, komplexní nepočítáme).

Příklad. 1. Rozhodněte, zda následující zobrazení mezi vektorovými prostory jsou lineární. Pokud ano, napište jejich předpis v souřadnicích standardních bazí uvedených prostorů pomocí násobení maticí.

(a) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \varphi(x_1, x_2) = \frac{x_1^3+x_2^3}{x_1^2+x_2^2}$,
(b) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ \varphi(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2, 2x_2 - x_3)$,
(c) $\varphi : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^2,\ \varphi(p) = (p(0), p'(0))$.

Příklad. 2. Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ uvažujme bázi $u_1 = (1, -1, 1)$, $u_2 = (1, 1, 0)$, $u_3 = (2, 1, 1)$. Nechť $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je lineární zobrazení, o němž víme, že

$$\varphi(u_1) = u_2,\ \varphi(u_2) = u_3,\ \varphi(u_3) = u_1.$$

Najděte matici A tvaru 3×3 tak, aby v souřadnicích standardní báze bylo $\varphi(x) = Ax$.

Příklad. 3. Nechť φ je zobrazení $\mathbb{R}^3$ do sebe, které je symetrií podle roviny $x_2 + x_3 = 0$. Najděte matici B takovou, že v souřadnicích standardní báze je $\varphi(x) = Bx$.

Příklad. 4. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Vlastní číslo $\lambda_1 = -1$ a vlastním vektorem $(1, -3)^T$ a vlastní číslo $\lambda_2 = 3$ s vlastním vektorem $(1, 1)^T$. □

Příklad. 5. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Charakteristický polynom je $\lambda^2 + 1$. Ten nemá reálné kořeny, pouze komplexní $\pm\,\mathrm{i}$. □

Příklad. 6. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Příklad. 7. Zjistěte, zda v $\mathbb{R}^3$ existuje báze tvořená vlastními vektory matice

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pokud ano, najděte ji.

Příklad. 8. Spočtěte vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Charakteristický polynom je $(\lambda - 2)(\lambda + 2)(\lambda - 1)(\lambda + 1)$.
Vlastní číslo 1 má vlastní vektor $(1, -1, 0, 1)^T$.
Vlastní číslo -1 má vlastní vektor $(-1, 0, 1, 0)^T$.
Vlastní číslo 2 má vlastní vektor $(0, -1, 0, 1)^T$.
Vlastní číslo -2 má vlastní vektor $(-1, 1, 1, 0)^T$. □