11. cvičení z MB141, jaro 2023

Příklad. 1. Farmář chová ovce. Jejich porodnost je dána pouze věkem a je průměrně 2 ovce na jednu ovci mezi jedním a dvěma lety věku, 4 ovce na jednu ovci mezi dvěma a třemi lety věku a 2 ovce na jednu ovci mezi třemi a čtyřmi roky věku. Ovce do jednoho roku nerodí. Z roku na rok umře vždy polovina ovcí a to rovnoměrně ve všech věkových skupinách. Po 4 letech posílá farmář ovce na jatka. Jakou část jehňátek může každý rok prodat, aby mu velikost stáda zůstávala stejná? V jakém věkovém poměru budou rozděleny počty ovcí v jednotlivých věkových skupinách?

Řešení. Aby Leslieho matice L měla vlastní číslo 1, musí být $\det(L - E) = 0$, což nastane pro $L_{21} = 2/9$. Proto může farmář prodat $1/2 - 2/9 = 5/18$ všech ovcí, které se mu každý rok narodí. Rozdělení ovcí ve věkových skupinách se ustálí v poměrech daných vlastním vektorem k 1. Ten je $(18, 4, 2, 1)$.

□

Příklad. 2. V jezeru žije populace bílých ryb. Předpokládáme, že druhého roku se dožije 20 % plůdku a od tohoto věku jsou ryby schopné se reprodukovat. Z mladých ryb přežije do třetího roku do stadia velké ryby 60 %. Úmrtnost velkých ryb je zanedbatelná. Dále předpokládáme, že roční přírustek ryb je trojnásobkem počtu ryb schopných reprodukce.

Tato populace by evidentně jezírko přeplnila. Rovnováhu chceme dosáhnout nasazením štik. Každá štika sní ročně 500 velkých ryb. Kolik štik máme do jezera nasadit, aby populace ryb stagnovala?

Řešení. Populaci rozdělíme na plůdek, mladé ryby a velké ryby. Po nasazení štik je Leslieho matice populačního modelu

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6 & \tau \end{pmatrix}.$$

Najdeme τ tak, aby matice měla 1 jako vlastní číslo. To nastane pro $\tau = 0,1$. Proto x štik sní ročně

$$500x = 0,9 \text{ velkých ryb.}$$

Proto jednu štiku nasadíme na $500 : 0,9 = 556$ velkých ryb. □

Příklad. 3. Roční Albertek Einsteinů staví se 4 kostkami věž. Ta mu ale každou chvilku spadne. Když ji má čerstvě spadlou, vezme nějakou kostku a snaží se ji postavit na některou jinou, což se mu podaří s pravděpodobností 1/2. Když má věž ze dvou nebo tří kostek, snaží se postavit další kostku na její vrchol, což se mu opět s pravděpodobností 1/2 podaří. Pokud má věž ze čtyř kostek, radostně zatleská a věž zboří. Takto pokračuje pořád dokola. Maminka se na něj po dostatečně dlouhé době přijde podívat. Jaká je pravděpodobnost, že uvidí stát věž o čtyřech kostkách?

Řešení. Jde o Markovův proces s maticí

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Spočítáme její vlastní vektor k vlastnímu číslu 1. Ten je $(8, 4, 2, 1)$. Tedy pravděpodobnosti, že maminka uvidí věž výšky 1, 2, 3, 4 jsou postupně $8/15, 4/15, 2/15, 1/15$. □

Příklad. 4. Rodina Novákova každoročně jezdí na celý srpen na dovolenou. Buď naloží auto kempingovým vybavením a cestuje po Evropě, nebo naloží kola a jedou k babičce na Vysočinu. Každý rok se rozhodují podle toho, jak trávili dovolenou poslední dva roky, a to částečně náhodně za použití klasické kostky. Rozhodují se podle následujících pravidel.

- Pokud byli poslední dva roky kempovat po Evropě, jedou na Vysočinu.
- Pokud byli poslední dva roky na Vysočině, tak jedou po Evropě.
- Pokud byli loni kempovat po Evropě a předloni u babičky, pak hází kostkou, a když padne liché číslo, tak jedou po Evropě, a když sudé číslo, tak jedou na Vysočinu.
- Pokud byli loni na Vysočině a předloni po Evropě, pak hází kostkou. Když padne 1 nebo 2, pak jedou na Vysočinu, jinak jedou po Evropě.

Tímto způsobem se o dovolené rozhodují celý život. V srpnu letošního roku je přijel do místa jejich bydliště navštívit kamarád, s kterým se neviděli po mnoho let. Soused, který věděl, že jsou buď na Vysočině nebo cestují po Evropě, ale nevěděl, kde byli poslední roky, jej poslal na Vysočinu. Určete, jaká je pravděpodobnost, že tam rodinu Novákovu najde.

Řešení. Stavy procesu jsou dány tím, kde Novákovi byly v posledních dvou letech. Označme je EE, EV, VE, VV. Markovova matice tohoto procesu je

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pravděpodobnost, že budou po mnoha letech na Vysočině, je součtem položek EV a VV v pravděpodobnostním vektoru, který je vlastním vektorem k vlastnímu číslu 1. Ten je $\frac{1}{17}(3, 6, 6, 2)$. Pravděpodobnost, že Novákovi budou na Vysočině, je

$$\frac{6}{17} + \frac{2}{17} = \frac{8}{17}.$$

□

Příklad. 5. Populační model je dán Leslieho maticí

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}.$$

Pro která $a \in (0, 1]$ populace expanduje, pro která směřuje k vyhynutí a pro která se stabilizuje?

Řešení. Charakteristický polynom matice je $\lambda^3 + \frac{1}{2}\lambda + a$. Kořen 1 má pro $a = \frac{1}{2}$, pro $a > \frac{1}{2}$ má kořen > 1 a pro $a < \frac{1}{2}$ má kořen v intervalu $(0, 1)$. Podle toho se populace stabilizuje, expanduje nebo směřuje k vyhynutí. $\square$