MB141, 7. 6. 2023, zkouška, skupina X

Příklad. 1A. [2 body] Určete obsah trojúhelníku ABC v prostoru $\mathbb{R}^2$, kde $A = [2, -1], B = [3, 2], C = [-2, 3]$.

Řešení. Nejprve z bodů A, B, C zkonstruujeme dva vektory se společným počátkem, například $B - A = (1, 3), C - A = (-4, 4)$. Z vektorů sestavíme matici a určíme determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} = 16.$$

Absolutní hodnota determinantu odpovídá obsahu rovnoběžníku a pro trojúhelník musíme vzít její polovinu. Obsah trojúhelníku je tedy 8. □

Příklad. 1B. [2 body] V prostoru $\mathbb{R}^3$ určete vzájemnou polohu přímky $p : [1, -1, -2] + r(1, -2, 3)$ a roviny $\rho : [0, -2, -2] + s(2, 1, 0) + t(-2, -3, 3)$.

Řešení. Pokusíme se spočítat průnik podprostorů, tj. položíme rovno parametrické vyjádření přímky $p : A + ru$ a parametrické vyjádření roviny $\rho : B + sv + tw$. (Úvaha se hodí i v případě, kdyby byl průnik prázdný.) Převodem vektorů doleva a bodů doprava dojdeme k soustavě vyjádřené vektorovou rovnicí $ru - sv - tw = B - A$. Praktické je ještě přehodit pořadí vektoru u a vektorů v, w, abychom se rychleji dostali k parametru r, který nám k vyjádření průniku bohatě stačí.

Řešíme tedy maticové schéma

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Soustava má jediné řešení, podprostory jsou tak různoběžné. Z posledního řádku plyne $r = 1$, průsečíkem $p \cap \rho$ je tedy bod $[1, -1, -2] + (1, -2, 3) = [2, -3, 1]$. □

Příklad. 1C. [2 body] Najděte vektor w, který patří do podprostoru generovaného vektory $u = (1, -2, 2)$ a $v = (1, 2, 0)$ v $\mathbb{R}^3$ a je kolmý k u. (Návod: Předpokládejte w jako lineární kombinaci u a v a aplikujte skalární součin s u.)

Řešení. Vektor v je s u nezávislý, podprostor je dvourozměrný a vektor v se nutně použije při konstrukci w. Můžeme tak předpokládat, že $w = v + au$ pro vhodné a. Na rovnici aplikujeme skalární součin s vektorem u. Z požadavku kolmosti máme $\langle u, w\rangle = 0$, a tedy $0 = \langle u, v\rangle + a\langle u, u\rangle$, po dosazení $0 = -3 + 9a$. Dostáváme $a = 1/3$, tedy $w = (4/3, 4/3, 2/3) \sim (2, 2, 1)$. □

Příklad. 2A. [2 body] O markovském procesu víme, že sestává ze tří stavů A, B, C, stav se vždy mění (tj. proces nepřejde do stejného stavu, v němž se právě nachází), pravděpodobnost přechodu z C do A je $1/2$ a proces se ustálí ve stacionárním vektoru $(2/9, 1/3, 4/9)$ pro dané pořadí stavů. Určete matici procesu M.

Řešení. Z požadavků přímo plyne, že na hlavní diagonále matice M jsou nuly (stav se vždy mění) a v pravém horním rohu je $1/2$ (přechod $C \to A$). Protože matice je pravděpodobnostní, musí být zbývající buňka třetího sloupce $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Pro pohodlí můžeme stacionární vektor vynásobit devíti (což je také vlastní vektor pro vlastní číslo 1.) Zbývající koeficient x v prvním řádku pak musí vyhovovat rovnici $-2 + 3x + 4 \cdot \frac{1}{2} = 0$, odkud máme $x = 0$. (Přechod $B \to A$ se tedy také neděje.) Opakováním úvahy o pravděpodobnostní matici zjistíme, že buňka ve 3. řádku a 2. sloupci musí být 1. Konečně pravděpodobnost y přechodu $A \to B$ musí splňovat $2y - 3 + 4 \cdot \frac{1}{2} = 0$, tedy $y = 1/2$ a odtud dopočítáme i poslední buňku pro přechod $A \to C$. Výsledkem je matice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

□

Příklad. 2B. [5 bodů] a) Určete zbytek po celočíselném dělení čísla 2022^{2023} číslem 2024. b) Najděte inverzi čísla 255 v modulu 2024.

Řešení. a) Modul 2024 lze opakovaně dělit 2 a výsledek je dělitelný 11, čímž dostaneme $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$. Z obdrženého prvočíselného rozkladu máme $\phi(2024) = (2-1) \cdot 2^2 \cdot (11-1) \cdot (23-1) = 880$.

Užitím Eulerovy věty dostaneme $2022^{2023} \equiv (-2)^{2023-2\cdot 880} = -2^{263} \pmod{2024}$. Zřejmě $-2^{263} \equiv 0 \pmod 8$ a užitím malé Fermatovy věty dostaneme $-2^{263} \equiv -2^{263-26\cdot 10} = -8 \equiv 3 \pmod{11}$ a $-2^{263} \equiv -2^{263-12\cdot 22} = -2^{-1} = -12 \equiv 11 \pmod{23}$.

Číslo -2^{263} následně dopočítáme podle čínské zbytkové věty postupným dosazováním. Z $8a \equiv -3a \equiv 3 \pmod{11}$ máme $a \equiv -1 \pmod{11}$, tj. $-2^{263} \equiv -8 \equiv 80 \pmod{88}$. Z $88b + 80 \equiv 19b + 11 \equiv 11 \pmod{23}$ máme dokonce $b \equiv 0 \pmod{23}$. Hledaný zbytek je tedy 80.

b) Z výpočtů části (a) víme, že je třeba určit inverzi x čísla 255 v modulech $8, 11$ a 23. Zřejmě $255 \equiv -1 \pmod 8), 255 \equiv 2 \pmod{11}$ a $255 \equiv 2 \pmod{23}$. Protože 255 dává stejný zbytek 2 v modulech 11 i 23, můžeme poslední dvě kongruence sloučit a řešit raději soustavu $-x \equiv 1 \pmod 8$ a $2x \equiv 1 \pmod{253}$. Odtud hned vidíme, že $x \equiv -1 \pmod 8$ a $x \equiv 127 \pmod{253}$. Protože $127 \equiv -1 \pmod 8$, je už $x = 127$ hledanou inverzí i v modulu 2024. □

Příklad. 3A. [2 body] V rovině $\mathbb{R}^2$ najděte nějaký vektor v, který s vektorem $u = (1, -2)$ svírá úhel $\frac{\pi}{4}$ $(= 45^\circ)$.

Řešení. Vektor v můžeme získat přímo z u otočením o $\pi/4$, tj. násobením maticí

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Pokud si vzorec pro matici otáčení nepamatujeme, můžeme si ji zde snadno odvodit ze znalosti obrazů vektorů standardní báze.

Alternativní postup: K vektoru u najdeme normálový vektor stejné velikosti $w = (2, 1)$. Vektory u, w pak tvoří sousední strany čtverce, vektor $v = u + w = (3, -1)$ je úhlopříčkou a dělí pravý úhel na poloviny.

Další alternativní postup (ale nedoporučený): Do vzorce pro výpočet odchylky vektorů dosadíme u a snažíme se odvodit souřadnice (x, y) vektoru v. Po úpravě zjistíme, že poměr $\langle u, v\rangle = x - 2y$ a $\|v\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ je $\sqrt{5/2}$. Souřadnice tedy získáme například řešením soustavy $x - 2y = 5, x^2 + y^2 = 10$. □

Příklad. 3B. [5 bodů] a) Určete matici A zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ve standardní bázi, které je kolmou projekcí na přímku $p : x + y = 0, x - y - z = 0$.

b) Určete obraz $f(v)$ vektoru $v = (1, 1, 3)$.

Řešení. a) Vektory $m = (1, 1, 0), n = (1, -1, -1)$ vycházející z obecného vyjádření přímky p jsou na p kolmé, v projekci f se tedy anulují: $f(m) = f(n) = 0$. Směrovým vektorem přímky p je například $u = (1, -1, 2)$ a ten se zobrazí sám na sebe: $f(u) = u$.

Vektory m, n, u a jejich obrazy naskládáme řádkově do maticového schématu a upravíme tak, aby se na levé straně objevila jednotková matice, tj. vektory standardní báze:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/6 & -1/6 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/6 & 1/6 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -1/3 & 2/3 \end{array}\right)$$

Hledaná matice A je tedy

$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

b) Obraz vektoru v získáme pomocí násobení maticí z části (a): $f(v) = Av = (1, -1, 2)$. Alternativní postup: Pokud se nepovedl výpočet matice A, můžeme vyjádřit vektor v v bázi $\alpha = (m, n, u)$, čímž dostaneme souřadnice $v_\alpha = (1, -1, 1)$. Protože příspěvky vektorů m, n se anulují, obraz bude mít souřadnice $f(v)_\alpha = (0, 0, 1)$, čemuž ve standardní bázi odpovídá právě vektor u. $\square$