**MB141, 19. 6. 2023, zkouška, skupina Y**

**Příklad**. **1A.** [2 body] Rozhodněte, zda soustava lineárních rovnic

$$\begin{array}{rrrrl} x & +4y & -2z & +3w & = 0 \\ 2x & +7y & -z & +4w & = -3 \\ -x & -2y & -4z & +w & = 6 \end{array}$$

má řešení. Případné řešení nehledejte, ale odpověď náležitě zdůvodněte.

**Příklad**. **1B.** [2 body] Najděte matici $M$ zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (ve standardní bázi), které je kolmou projekcí (promítáním) na rovinu $\rho : y = 0$.

**Příklad**. **1C.** [2 body] Určete vzdálenost bodu $A = [11, 5, 3]$ od roviny $\rho : B + su + tv, B = [2, 2, 3], u = (0, 1, -2), v = (1, -3, 2)$ v prostoru $\mathbb{R}^3$.

**Příklad**. **2A.** [2 body] Najděte inverzi prvku $x = 35$ modulo $96$.

**Příklad**. **2B.** [5 bodů] Nechť $n = 29$ je modul a $g = 8$.

a) Dokažte, že $g$ je primitivní kořen.

b) Bob zná Alicin veřejný klíč $g^a = 27$, zvolí si $b = 9$ a chce poslat zprávu $M = 13$ protokolem ElGamal. Určete jeho veřejný klíč $g^b$ a zašifrovanou zprávu $g^{ab}M$.

**Příklad**. **3A.** [2 body] Určete vlastní čísla matice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Příklad**. **3B.** [5 bodů] Starý dub prochází každý rok některou ze tří růstových fází: buď to sílí v kořenech, nebo ve větvích, nebo plodí žaludy. Po roce, ve kterém dub neplodí, s pravděpodobností $1/2$ následuje rok, ve kterém dub sílí ve větvích, a s pravděpodobností $1/4$ následuje rok, ve kterém dub sílí v kořenech. Po roce, ve kterém dub plodí, následuje s pravděpodobností $3/4$ rok, ve kterém dub sílí ve kořenech, a dub určitě zvovu neplodí.

a) Určete matici Markovova procesu $M$ v pořadí stavů „kořeny“, „větve“, „žaludy“.

b) Určete pravděpodobnost, že v daném roce dub plodí.