MB141, 28. 6. 2023, zkouška

Příklad. 1A. [2 body] Lineární podprostor P prostoru $\mathbb{R}^4$ je generován vektory

$$u_1 = (1, -1, -1, 2), \quad u_2 = (2, -2, -2, 4), \quad u_3 = (3, 2, 3, 4), \quad u_4 = (-2, 7, 8, -6).$$

Vyberte z těchto vektorů bázi podprostoru P.

Řešení. Vektory přepíšeme jako sloupce do matice a upravíme ji na schodový tvar:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 2 & 7 \\ -1 & -2 & 3 & 8 \\ 2 & 4 & 4 & -6 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pokud dochází ve sloupci k odskoku na nový schod, znamená to, že příslušný vektor je nezávislý na předchozích (přispívá k navýšení hodnosti matice či dimenzi podprostoru) a je tak vhodný pro zařazení do báze. Za bázi tedy lze zvolit například dvojici (u_1, u_3). $\square$

Příklad. 1B. [2 body] Dokažte, že 17 není primitivní kořen modulo 19.

Řešení. Protože $\phi(19) = 18$ a 17 není primitivní, mělo by nastat $17^6 \equiv 1 \pmod{19}$ nebo $17^9 \equiv 1 \pmod{19}$. Budeme tedy postupně počítat $17^2, 17^3, 17^6, 17^9$ s tím, že bude-li některý mezivýsledek už kongruentní 1, můžeme ihned skončit. Číslo 17 nahradíme -2 a dostáváme $(-2)^2 = 4, (-2)^3 = -8, (-2)^6 = 64 \equiv 7, (-2)^9 = -8 \cdot 7 \equiv 1$, což jsme potřebovali dokázat. $\square$

Příklad. 1C. [2 body] Určete poslední dvojčíslí čísla $x = 1234^{567}$.

Řešení. Zřejmě je 1234^{567} dělitelné 4 a stačí tedy určit $1234^{567} \equiv 9^{567} \equiv ? \pmod{25}$. Platí $\phi(25) = 20$, zredukujeme tedy úlohu na výpočet 9^7 modulo 25. Dostáváme $9^7 \equiv 9 \cdot 81^3 \equiv 9 \cdot 6^3 \equiv 9 \cdot 6 \cdot 11 \equiv -6 \pmod{25}$. Substitucí $x = 4y$ do kongruence dojdeme k výsledku $x \equiv 44 \pmod{100}$, poslední dvojčíslí je tedy 44. $\square$

Příklad. 2A. [2 body] Určete vzájemnou polohu přímky $p : x+2y+z = 0, -x+y-2z = 1$ a roviny $\rho : A + ru + sv, A = [1, -2, 4], u = (1, -1, 1), v = (-2, 0, 1)$ včetně případného průniku v $\mathbb{R}^3$.

Řešení. Úlohu lze řešit dosazením parametrického vyjádření roviny ρ do parametrického vyjádření přímky p. Dostáváme soustavu $(1 + r - 2s) + 2(-2 - r) + (4 + r + s) = 0, -(1 + r - 2s) + (-2 - r) - 2(4 + r + s) = 1$, jejímž řešením je dvojice parametrů $r = -3, s = 1$. Z jednoznačnosti vyplývá, že průnik je jednoprvkový a podprostory jsou různoběžné. Dosazením r, s do parametrického vyjádření ρ dostaneme $p \cap \rho = \{[-4, 1, 2]\}$. $\square$

Příklad. 2B. [5 bodů] a) Určete matici M lineárního zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (ve standardní bázi), které je otáčením prostoru kolem přímky p se směrovým vektorem $u = (1, 0, 1)$ o úhel $\pi = 180°$.

b) Určete obraz vektoru $w = (1, 2, 3)$ v zobrazení f.

Řešení. a) Nejprve najdeme dva vektory udávající rovinu kolmou na přímku p, např. $m = (0, 1, 0), n = (1, 0, -1)$. Pro zobrazení f platí $f(u) = u, f(m) = -m, f(n) = -n$. Úpravou maticového schématu

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

dojdeme k řešení

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) $f(w)$ určíme jako $Mw = (3, -2, 1)$. □

Příklad. 3A. [2 body] Najděte vektor w o velikosti 1 kolmý na vektory $u = (1, 5, 1), v = (2, 4, -1)$ v $\mathbb{R}^3$.

Řešení. Nejprve najdeme nějaký nenulový vektor z kolmý na u, v, tj. $\langle z, u\rangle = \langle z, v\rangle = 0$. Přepsání skalárních součinů do souřadnic vede k homogenní soustavě rovnic s maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Řešením je například $z = (3, -1, 2)$, jeho velikost je $\|z\| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{14}$. Odtud již odvodíme $w = \frac{\sqrt{14}}{14}(3, -1, 2)$. □

Příklad. 3B. [5 bodů] Uvažujeme třístavový Markovův řetězec se stavy A, B, C a pravděpodobnostmi přechodů

$$\begin{array}{lll} P(A \to B) = 0, & P(B \to C) = 0, & P(C \to A) = 0, \\ P(A \to A) = 1/3, & P(B \to B) = 1/2, & P(C \to C) = 2/3. \end{array}$$

a) Dopočítejte zbylé přechody a sestavte přechodovou pravděpodobnostní matici M. Ověřte, že M je primitivní, tj. že nějaká mocnina M^k má všechny členy kladné.

b) Určete pravděpodobnost, s jakou se bude po dostatečně dlouhé době systém dostávat do stavu A.

Řešení. a) Matici sestavujeme tak, aby vstupní stavy odpovídaly sloupcům a výstupní stavy řádkům. Chybějící informace doplníme z faktu, že součet pravděpodobností výstupů z každého stavu je 1. Při dodržení abecedního pořadí stavů dostaneme matici

$$M = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/3 \\ 2/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Primitivnost můžeme prověřit symbolickým umocňováním matice $\left(\begin{smallmatrix} + & + & 0 \\ 0 & + & + \\ + & 0 & + \end{smallmatrix}\right)$, přičemž zjistíme, že již M^2 je pozitivní. (V každém řádku i sloupci jsou dvě $+$, musí se tedy při násobení podle přihrádkového principu některá z nich potkat.)

b) Hledáme vlastní vektor pro vlastní číslo 1, tj. řešíme homogenní soustavu $(M - E)x = 0$. Netriviálním řešením je například vektor $x = (3, 4, 6)$. Jeho vydělením číslem $3+4+6 = 13$ dostaneme pravděpodobnostní vektor $(3/13, 4/13, 6/13)$. Stav A tedy bude navštěvován s pravděpodobností $3/13$. □