MB141, JS 2023, cvičná zkouška

Příklad. 1. [2 body] Lineární podprostor P prostoru $\mathbb{R}^5$ je generován vektory

$$u_1 = (1, 1, -1, -1, 2), \quad u_2 = (2, 1, -1, 0, 4), \quad u_3 = (-1, -2, 2, 3, -2), \quad u_4 = (0, 3, 2, 3, 4).$$

Vyberte z těchto vektorů bázi podprostoru P.

Příklad. 2. [2 body] Najděte inverzi prvku $x = 17$ modulo 60.

Příklad. 3. [2 body] Určete poslední číslici čísla $x = 2023^{2023}$.

Příklad. 4. [2 body] Určete průnik přímky $p : A + tu, A = [1, 2, 3], u = (-2, 1, 0)$ a roviny $\rho : x - 2y + 2z = 7$ v $\mathbb{R}^3$.

Příklad. 5. [2 body] Najděte vektor w o velikosti 1 kolmý na vektory $u = (4, -3, 1), v = (-4, 1, 1)$ v $\mathbb{R}^3$.

Příklad. 6. [5 bodů]

a) Určete matici M lineárního zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (ve standardní bázi), které je kolmou projekcí prostoru na rovinu $\rho : x + y - z = 0$.

b) Určete projekci vektoru $w = (1, 1, 1)$ do ortogonálního doplňku roviny ρ.

Příklad. 7. [5 bodů] Vývoj populace se řídí Leslieho modelem s maticí:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & p & 1 \\ 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Určete, pro které hodnoty parametru p je populace stabilní.

b) Pro takové p určete poměr sledovaných věkových kategorií.

Příklad. 1. [2 body] Lineární podprostor P prostoru $\mathbb{R}^5$ je generován vektory

$$u_1 = (1, 1, -1, -1, 2), \quad u_2 = (2, 1, -1, 0, 4), \quad u_3 = (-1, -2, 2, 3, -2), \quad u_4 = (0, 3, 2, 3, 4).$$

Vyberte z těchto vektorů bázi podprostoru P.

Řešení. Vektory přepíšeme jako sloupce do matice a upravíme ji na schodový tvar:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & -2 & 4 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pokud dochází ve sloupci k odskoku na nový schod, znamená to, že příslušný vektor je nezávislý na předchozích (přispívá k navýšení hodnosti matice či dimenzi podprostoru) a je tak vhodný pro zařazení do báze. Za bázi tedy lze zvolit například trojici (u_1, u_2, u_4). □

Příklad. 2. [2 body] Najděte inverzi prvku $x = 17$ modulo 60.

Řešení. Hledáme y, aby platilo $yx \equiv 1 \pmod{60}$. Protože $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, usnadníme si výpočet nalezením inverze v menších modulech $4, 3, 5$. Máme

$$x \equiv 1 \pmod 4, \qquad x \equiv 2 \pmod 3, \qquad x \equiv 2 \pmod 5.$$

Zřejmě tedy

$$y \equiv 1 \pmod 4, \qquad y \equiv 2 \pmod 3, \qquad y \equiv 3 \pmod 5.$$

Z první kongruence víme, že y je tvaru $4a+1$, což dosadíme do druhé a dostaneme $4a+1 \equiv a+1 \equiv 2 \pmod 3$, tj. $a \equiv 1 \pmod 3$. Odtud $y \equiv 5 \pmod{12}$. Postup zopakujeme, vyjádříme $y = 12b + 5$ a dosadíme do poslední kongruence: $12b + 5 \equiv 2b \equiv 3 \pmod 5$. Vynásobením 3 dostaneme $6b \equiv b \equiv 9 \equiv 4 \pmod 5$, odkud již plyne, že $y \equiv 12 \cdot 4 + 5 = 53 \pmod{60}$. Správnost výpočtu si ověříme zkouškou: $17 \cdot 53 \equiv 17 \cdot (-7) = -119 \equiv 1 \pmod{60}$.

Alternativní postup: Inverzi lze získat i řešením rovnice

$$17y + 60z = 1$$

v celých číslech na základě Bezoutovy věty. Připomínáme, že postup je založen na postupném dělení se zbytkem podle Eukleidova algoritmu a následným zpětným dosazováním vedoucímu k vyjádření neznámých y, z. □

Příklad. 3. [2 body] Určete poslední číslici čísla $x = 2023^{2023}$.

Řešení. Poslední číslice je zbytkem po dělení x deseti a ještě platí $10 = 2 \cdot 5$. Číslo x je zřejmě liché, tedy $x \equiv 1 \pmod 2$. Zbývá zjistit, čemu je kongruentní 3^{2023} modulo 5. Podle malé Fermatovy věty platí $3^4 \equiv 1 \pmod 5$, z exponentu tedy můžeme odečíst 2020 jakožto násobek čtyř. Odtud $x \equiv 3^3 \equiv 3 \cdot (-1) \equiv 2 \pmod 5$. Bez počítání vidíme, že společným řešením obou kongruencí je 7, tj. $x \equiv 7 \pmod{10}$, což je také hledaná poslední číslice. □

Příklad. 4. [2 body] Určete průnik přímky $p : A + tu$, $A = [1, 2, 3]$, $u = (-2, 1, 0)$ a roviny $\rho : x - 2y + 2z = 7$ v $\mathbb{R}^3$.

Řešení. Přímka p je určena parametricky, zatímco rovina ρ implicitně. Dosadíme tedy parametrické souřadnice přímky do rovnice roviny. Dostáváme rovnici

$$(1 - 2t) - 2(2 + t) + 2 \cdot 3 = 7,$$

po úpravě
$$3 - 4t = 7.$$
Rovnice má jediné řešení $t = -1$, přímka a rovina se tedy protnou v jediném bodě. Souřadnice průsečíku určíme dosazením t do parametrického vyjádření přímky: $A - u = [3, 1, 3]$.
□

Příklad. 5. [2 body] Najděte vektor w o velikosti 1 kolmý na vektory $u = (4, -3, 1), v = (-4, 1, 1)$ v $\mathbb{R}^3$.

Řešení. Nejprve najdeme nějaký nenulový vektor z kolmý na u, v, tj. $\langle z, u\rangle = \langle z, v\rangle = 0$. Přepsání skalárních součinů do souřadnic vede k homogenní soustavě rovnic s maticí
$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Řešením je například $z = (1, 2, 2)$, jeho velikost je $\|z\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3$. Odtud již odvodíme $w = \frac{1}{3}z = (1/3, 2/3, 2/3)$. □

Příklad. 6. [5 bodů]

a) Určete matici M lineárního zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (ve standardní bázi), které je kolmou projekcí prostoru na rovinu $\rho : x + y - z = 0$.

b) Určete projekci vektoru $w = (1, 1, 1)$ do ortogonálního doplňku roviny ρ.

Řešení. a) Rovina ρ má normálový vektor $n = (1, 1, -1)$, který se projekcí anuluje, tj. $f(n) = 0$. K jednoznačnému určení zobrazení potřebujeme najít ještě dva další vektory u, v, které spolu s n vytvoří bázi $\mathbb{R}^3$. Je vhodné zvolit u, v z roviny ρ, poněvadž o takových víme, že $f(u) = u$ a $f(v) = v$. Volbou $x = 1, y = 0$ v rovnici roviny dostáváme $z = 1$, podobně pro $x = 0, y = 1$ je také $z = 1$. Obdrželi jsme vektory $u = (1, 0, 1), v = (0, 1, 1)$.

Vektory u, v, n a jejich obrazy $u, v, 0$ rozepíšeme do řádků maticového schématu a upravujeme tak, abychom v levé části dostali jednotkovou matici:
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2/3 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 2/3 \end{array}\right).$$
Řádky jednotkové matice odpovídají vektorům standardní báze, řádky na pravé straně jsou jejich obrazy. Dohromady tedy vytváří matici
$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Jako zkoušku můžeme prověřit součiny $Mu = u, Mv = v, Mn = 0$.

b) Úkol lze řešit samostatně, ale se znalostí matice M by to byla škoda. Vektor w se promítá do ρ jako Mw, do ortogonálního doplňku se tedy promítne jako $w - Mw = (1, 1, 1) - (2/3, 2/3, 4/3) = (1/3, 1/3, -1/3)$. □

Příklad. 7. [5 bodů] Vývoj populace se řídí Leslieho modelem s maticí:
$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & p & 1 \\ 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Určete, pro které hodnoty parametru p je populace stabilní.

b) Pro takové p určete poměr sledovaných věkových kategorií.

Řešení. a) Populace je stabilní, pokud je 1 vlastní číslo matice P. To nastává, když $\det(L - E) = 0$. Protože matice je parametrická, je vhodné determinant počítat pomocí Laplaceova rozvoje, například podle prvního řádku. Dostaneme rovnici

$$1 - \frac{3}{4} - \frac{3}{8}p - \frac{3}{32} = 0,$$

jejímž řešením je $p = 5/12$.

b) Poměr kategorií určíme z odpovídajícího vlastního vektoru, tj. řešením homogenní soustavy lineárních rovnic $(L - E)x = 0$. Řešení lze přímo vyčítat z matice, neboť v řádcích dva až čtyři jsou právě dva nenulové koeficienty. Dostáváme vlastní vektor např. $x = (1, 3/4, 3/8, 3/32)$, celočíselně vyjádřený poměr tedy bude $32 : 24 : 12 : 3$.

Alternativní postup: Nejprve vyřešíme b) postupem výše, protože jsme tam p vlastně vůbec nepotřebovali. Hodnoty řešení x poté dosadíme do první rovnice homogenní soustavy a určíme p. (Vyhovuje-li netriviální x i první rovnici, znamená to, že řádky matice jsou lineárně závislé a determinant musí být nulový.) $\square$