MB141 – 2. přednáška
Soustavy lineárních rovnic
a počítání s maticemi

Martin Čadek
s využitím přednášky Ondřeje Klímy pro předmět MB101

Jarní semestr 2022

Osnova přednášky

- Soustavy lineárních rovnic
- Gaussova eliminace
- Operace s maticemi

Soustava lineárních rovnic

Naším cílem bude řešit soustavy lineárních rovnic. Pro zadaná čísla a_{ij} a b_i hledáme čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$, která splňují rovnice

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ldots & & \vdots & & \vdots \\ a_{k1}x_1 & + & a_{k2}x_2 & + & \ldots & + & a_{kn}x_n & = & b_k \end{array}$$

To je soustava k lineárních rovnic o n neznámých $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

- Říkáme, že dvě soustavy jsou ekvivalentní, jestliže mají stejnou množinu řešení.
- Postup řešení – přechod od zadané soustavy k ekvivalentní soustavě, kterou již umíme vyřešit.
- Provádíme pomocí tzv. elementárních úprav.

Rozšířená matice soustavy

Elementární úpravy jsou

- záměna pořadí dvou rovnic,
- vynásobení rovnice nenulovým číslem,
- k dané rovnici přičteme c-násobek jiné rovnice.

K provádění těchto úprav nemusíme psát rovnice. Stačí, když budeme zaznamenávat koeficienty u neznámých a koeficienty pravé strany. K tomu použijeme tzv. rozšířenou matici soustavy.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} & b_k \end{array}\right) = (A|b)$$

Její levá část, matice A, se nazývá matice soustavy.

Elementární řádkové operace

Elementárním úpravám soustavy rovnic pak odpovídají následující elementární řádkové operace s rozšířenou maticí soustavy.

- záměna dvou řádků matice,
- vynásobení řádku nenulovým číslem,
- k danému řádku přičteme *c*-násobek jiného řádku.

Které soustavy lze jednoduše vyřešit? Jsou to ty, jejichž rozšířená matice soustavy je v tzv. schodovitém tvaru. Příkladem je následující matice

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 2 & -2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

popisující soustavu o neznámých x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.

Příklad soustavy s maticí schodovitého tvaru

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 2 & -2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

V třetí rovnici zvolíme x_5 za parametr a spočítáme x_4:

$$x_5 = p, \quad x_4 = 1 - 2p.$$

Z druhé rovnice spočítáme

$$x_3 = -p - 2(1 - 2p) = 3p - 2.$$

V prvé rovnici zvolíme x_2 za parametr a spočítáme x_1:

$$x_2 = s, \quad x_1 = \frac{1}{2}(3 - 2s + 2(3p - 2) - (1 - 2p) - p) = \frac{7}{2}p - s - 1$$

Řešením příslušné sosutavy jsou tedy všechny pětice

$$\left[\frac{7}{2}p - s - 1, s, 3p - 2, 1 - 2p, p\right], \text{ kde } p, s \in \mathbb{R}.$$

Schodovitý tvar matice

První nenulové číslo v řádku matice se nazývá pivot nebo také vedoucí koeficient tohoto řádku.

Matice $A = (a_{ij})$ je ve schodovitém tvaru, jestliže:

- Její nulové řádky, pokud nějaké má, jsou dole.
- Je-li a_{ij} pivot i-tého řádku, pak $(i+1)$-ní řádek je buď nulový nebo jeho pivot $a_{i+1,p}$ je vpravo od a_{ij}, tj. $p > j$.

Matice v řádkově schodovitém tvaru vypadá takto

$$\begin{pmatrix} 0\dots0 & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,k-1} & a_{1,k} & \dots & \dots & \dots & a_{1,m} \\ 0\dots0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{2,k} & \dots & \dots & \dots & a_{2,m} \\ 0\dots0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & a_{3,p} & \dots & a_{3,m} \\ \vdots & & & & \vdots & & & & & \vdots \end{pmatrix}$$

a matice může, ale nemusí, končit několika nulovými řádky.

Algoritmus – Gaussova eliminace

Věta

Nenulovou matici s prvky v $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{Q}$ lze konečně mnoha elementárními řádkovými transformacemi převést na schodovitý tvar.

(1) Záměnou řádků docílíme, že v prvním řádku bude v prvním nenulovém sloupci nenulový prvek, nechť je to j-tý sloupec.

(2) Pro $i = 2, \ldots$, vynásobením prvního řádku prvkem a_{ij}, i-tého řádku prvkem a_{1j} a odečtením vynulujeme prvek a_{ij} na i-tém řádku.

(3) Opakovanou aplikací bodů (1) a (2), vždy pro zbytek řádků a sloupců v získané matici dospějeme po konečném počtu kroků k požadovanému tvaru.

(4) Ze schodovitého tvaru vidíme, zda je soustava řešitelná. Pokud ano, umíme popsat množinu všech řešení.

Příklad

Vyřešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & + & & - & x_4 & = & -2 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & - & x_4 & = & 2 \end{array}$$

Matici soustavy upravíme pomocí Gaussovy eliminace na schodovitý tvar: ►►

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 3 & 0 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -8 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ještě jednou s jinou pravou stranou

Odtud dostaneme řešení

$$[x_1, x_2, x_3, x_4] = \left[\frac{4}{5} - \frac{12}{5}q + \frac{4}{5}p,\ -\frac{6}{5} + \frac{8}{5} - \frac{1}{5}p,\ q,\ p\right]$$

Příklad

Vyřešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & + & & - & x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & - & x_4 & = & 2 \end{array}$$

Řešení pro jinou pravou stranu

Matici soustavy upravíme stejnými úpravami jako v předchozím případě na schodovitý tvar:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -8 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Poslední řádek vede na rovnici $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 3$, která evidentně nemá řešení. Tedy ani původní soustava nemá řešení (množina řešení je prázdná).

Další příklad

Příklad

Vyřešte soustavu lineárních rovnic.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & 1 & 5 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 5 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

Řešení $[-4, 0, -1, 2, 0] + t(-2, 1, 0, 0, 0) + s(2, 0, 2, -1, 1)$.

Množina řešení soustavy (nad reálnými čísly $\mathbb{R}$ nebo racionálními čísly $\mathbb{Q}$) je: jednoprvková, prázdná nebo nekonečná.

Pro homogenní soustavy (pravé strany nulové) je množina řešení jednoprvková nebo nekonečná.

Operace s maticemi - sčítání matic a násobení číslem

Matice A tvaru $k \times n$ je tabulka s k řádky a n sloupci tvořená čísly A_{ij}. První index i značí řádek, druhý index j značí sloupec. Matice A a B stejného rozměru $k \times n$ lze sčítat a to tak, že sčítáme prvky obou matic umístěné ve stejném řádku a sloupci. Výsledkem součtu je matice $A + B$ tvaru $k \times n$ s prvky

$$(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}.$$

Každou matici A můžeme násobit reálným číslem r tak, že tímto číslem vynásobíme každý prvek matice. Výsledkem je matice rA s prvky

$$(rA)_{ij} = r \cdot A_i j.$$

Transponovaná matice k matici A tvaru $k \times n$ je matice A^T tvaru $n \times k$ určená předpisem

$$A^T_{ij} = A_{ji}.$$

Slovy: řádky matice A napíšeme jako sloupce matice A^T.

Násobení matic

Násobení matic není definováno po složkách! Násobit můžeme pouze matici A tvaru $k \times n$ s maticí B tvaru $n \times p$. Výsledkem násobení je matice $A \cdot B$ tvaru $k \times p$. Má stejný počet řádků jako A a stejný počet sloupců jako B. V i-tém řádku a j-tém sloupci matice $A \cdot B$ stojí číslo

$$(A \cdot B)_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \cdot + A_{in}B_{nj} = \\ = \sum_{s=1}^{n} A_{is}B_{sj}.$$

Speciálně součinem řádku délky n a sloupce výšky n je číslo, zatímco součinem sloupce výšky k a řádku délky p je matice tvaru $k \times p$.

Množinu všech matic tvaru $k \times n$, jejichž prvky jsou reálná čísla, označujeme $\mathrm{Mat}_{k,n}(\mathbb{R})$.

Vlastnosti násobení matic

Násobení je asociativní

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C.$$

Je distributivní vzhledem ke sčítání

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C, \quad (K + L) \cdot M = K \cdot M + L \cdot M.$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje jednotková matice E_n tvaru $n \times n$ taková, že $(E_n)_{ii} = 1$ a $(E_n)_{ij} = 0$ pro $i \neq j$. Pro každou matici A tvaru $k \times n$ platí

$$E_k \cdot A = A, \quad A \cdot E_n = A.$$

Ukazuje se, že takto definované násobení je užitečné. Prvním příkladem je zápis soustav rovnic pomocí maticového násobení. S dalšími příklady se setkáme v dalších přednáškách, speciálně v deváté přednášce o lineárních modelech.

Maticový zápis systémů lineárních rovnic

- Soustava

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & = & b_3 \end{array}$$

- Zápis pomocí násobení matic:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

- Stručně píšeme $A \cdot x = b$, kde $x \in \mathbb{K}^3$, $b \in \mathbb{K}^3$ (sloupce).
- Obecně $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^k$ a tedy $A \in Mat_{k,n}(\mathbb{R}$.
  Přesněji $x \in Mat_{n,1}(\mathbb{K})$ a $b \in Mat_{m,1}(\mathbb{K})$.
- A matice soustavy, $(A \mid b)$ rozšířená matice soustavy.

Domácí úloha

Příklad (2.1)

Nalezněte všechny symetrické matice A rozměru 3×3 s jedničkami na diagonále, pro které platí $A \cdot (1,1,1)^T = (1,2,3)^T$.

Příklad (2.2)

Řešte následující soustavu lineárních rovnic v $\mathbb{R}$, kde x_1, x_2, x_3 jsou neznámé a a a b jsou parametry. Tzn. určete, pro které hodnoty $a, b \in \mathbb{R}$ má soustava řešení, a pro tato a, b popište množinu všech řešení dané soustavy.

$$\begin{array}{cccccc} 2x_1 & +3x_2 & +ax_3 & = & 1 \\ 3x_1 & +2x_2 & +bx_3 & = & -1 \\ x_1 & +2x_2 & & = & 1 \end{array}$$

Domácí úloha

Příklad (2.3)

Pro libovolnou elementární úpravu nalezněte matici, která ji realizuje pomocí násobení. Tj. pokud $A \sim B$ je jedna úprava, pak existuje matice U taková, že $B = U \cdot A$.