

# MB141 – 3. přednáška

## Inverzní matice a determinanty

Martin Čadek  
s využitím přednášky Ondřeje Klímy pro předmět MB101

Jarní semestr 2022

- Inverzní matice a jejich výpočet
- Determinant matice
- Výpočet determinantu pomocí Laplaceova rozvoje
- Motivace – objem.
- Obecná definice  $\det A = |A|$  (pro čtvercovou matici  $A$ ).
- Determinant a elementární řádkové úpravy.
- Souvislost determinantu s maticí  $A^{-1}$ .
- Použití pro přímý výpočet řešení soustavy.
- Výpočet determinantu.
- Determinant a součin matic –  $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$ .

Připomeňme, že písmenem  $E$  označujeme jednotkovou matici.

## Definice

Říkáme, že  $B$  je **matice inverzní** ke čtvercové matici  $A$ , když  $A \cdot B = B \cdot A = E$ . Taková matice je určena jednoznačně, a proto píšeme  $B = A^{-1}$ , přičemž  $B$  je čtvercová matice stejného rozměru jako  $A$ . Matici, k níž existuje matice inverzní, říkáme **invertibilní matice**.

Pokud řešíme soustavu  $A \cdot x = b$  s invertibilní maticí  $A$ , pak  $x = A^{-1} \cdot b$  je jediné řešení soustavy.

**Postup výpočtu inverzní matice:** snažme se určit matici  $X$  splňující  $A \cdot X = E$  postupně po sloupcích. Je-li  $A$  matice  $3 \times 3$  a sloupce matice  $X$  jsou postupně  $x$ ,  $y$  a  $z$ , řešíme rovnice

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Ay = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Az = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tyto tři soustavy mají stejnou levou stranu a my je můžeme řešit současně tak, že elementárními řádkovými operacemi upravujeme na schodovitý tvar matice

$$\left( A \mid \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = (A|E) \sim \dots \sim (C|D),$$

kde matice  $C$  je ve schodovitém tvaru. Mohou nastat tyto dvě možnosti:

- 1 Jestliže je její poslední řádek nulový, pak jedna ze tří rovnic není řešitelná a inverzní matice neexistuje.
- 2 Matice  $C$  má v každém řádku pivota. Ty leží na uhlopříčce. Tedy s maticí  $(C|D)$  můžeme provádět tzv. **zpětnou Gaussovu eliminaci**, tj. elementárními řádkovými operacemi postupně vytvářet nuly nad pivoty matice  $C$ .

Tímto postupem dostaneme na místě matice  $C$  jednotkovou matici, na místě matice  $D$  budou sloupce inverzní matice, tedy  $A^{-1}$ .

$$(A|E) \sim \dots \sim (C|D) \sim \dots \sim (E|A^{-1})$$

Ukažme si to na příkladu:

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \dots \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right) \\ & \sim \dots \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{13}{9} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{7}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{array} \right). \end{aligned}$$

## Algoritmus pro nalezení inverzní matice


- 1 Vedle sebe napíšeme původní matici  $A$  a jednotkovou matici  $E$ .
- 2 Matici  $A$  upravujeme řádkovými elementárními úpravami nejprve na schodovitý tvar.
- 3 Následně zpětnou eliminací na jednotkovou matici  $E$ .
- 4 Tytéž úpravy souběžně prováděné s vedle napsanou maticí  $E$  vedou k hledané inverzní matici  $A^{-1}$ .
- 5 Pokud tento algoritmus narazí na vynulování celého řádku v původní matici, znamená to, že matice inverzní neexistuje.

Čtvercové matici

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

jsme přiřadili číslo  $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ , které jsme nazvali **determinantem matice**  $A$ . Jeho geometrický význam byl orientovaný obsah rovnoběžníku určeného vektory  $(a_{11}, a_{21})$  a  $(a_{12}, a_{22})$ .

**Determinant** budeme definovat pro každou čtvercovou matici. Neuděláme to ale přímým předpisem (i když to je možné), ale nepřímou tak, že vyčíslíme jeho vlastnosti. Výhodou tohoto postupu je, že nám dává přímý návod k výpočtu determinantu, zatímco z přímé definice determinant většinou nepočítáme

**Geometrický význam determinantu** matice  $A$  tvaru  $n \times n$  bude orientovaný objem rovnoběžnostěnu v  $n$ -rozměrném prostoru určeného vektory sloupců (nebo řádků) matice  $A$ . 

## Definice

Každé čtvercové matici  $A$  tvaru  $n \times n$  lze jednoznačně přiřadit číslo  $|A|$ , **determinant matice  $A$** , který splňuje následující pravidla:

- 1) Vznikne-li matice  $B$  přehozením dvou řádků matice  $A$ , pak  $|B| = -|A|$ .
- 2) Vznikne-li matice  $B$  vynásobením některého řádku matice  $A$  číslem  $c$ , pak  $|B| = c \cdot |A|$ .
- 3) Vznikne-li matice  $B$  z matice  $A$  přičtením násobku některého řádku k jinému řádku, pak  $|B| = |A|$ .
- 4) Determinant jednotkové matice je  $|E| = 1$ .
- 5) Determinant transponované matice je  $|A^T| = |A|$ .



Z předchozích pravidel lze odvodit další:

- 6) Determinant čtvercové matice ve schodovitém tvaru (tzv. horní trojúhelníkové matice) je roven součinu čísel na uhlopříčce matice. ▶▶
- 7) Determinant matice, která obsahuje nulový řádek nebo sloupec, je roven 0. ▶▶
- 8) Je-li  $A$  matice tvaru  $k \times k$ ,  $B$  matice tvaru  $(n - k) \times (n - k)$ ,  $C$  matice tvaru  $k \times (n - k)$  a  $O$  nulová matice tvaru  $(n - k) \times k$ , pak determinant matice  $n \times n$  ▶▶

$$\begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = |A| \cdot |B|.$$

Výpočet determinantu provádíme pomocí Gaussovy eliminace.

## Příklad

Určete determinant matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Výsledek:  $|A| = 9$ .



## Příklad

Určete determinant matice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Výsledek:  $|B| = 12$ .



## Věta (Cauchyova)

*Pro libovolné dvě čtvercové matice  $A$  a  $B$  stejné velikosti platí*

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|.$$

Důsledek: Determinant invertibilní matice je nenulový a platí  $|A^{-1}| = |A|^{-1}$ . Platí i obrácené tvrzení.

## Věta

*Pro čtvercovou matici  $A$  je ekvivalentní:*

- $|A| \neq 0$ ,
- existuje  $A^{-1}$ ,
- Pro každou pravou stranu  $b$  má soustava  $A \cdot x = b$  jediné řešení.

# Laplaceův rozvoj determinantu

Bud'  $A = (a_{ij})$  čtvercová matice řádu  $n > 1$ . Pro zvolené indexy  $i, j$  označme  $A_{ij}$  čtvercovou matici velikosti  $n - 1$ , která vznikne z  $A$  vynecháním  $i$ -tého řádku a  $j$ -tého sloupce. Pak číslo

$$\widehat{A}_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot |A_{ij}|$$

nazýváme **algebraický doplněk** prvku  $a_{ij}$  v matici  $A$ .

## Věta (Laplaceův rozvoj)

*Bud'  $A = (a_{ij})$  čtvercová matice řádu  $n > 1$ . Pak pro libovolný index  $i$  platí*

$$|A| = a_{i1}\widehat{A}_{i1} + a_{i2}\widehat{A}_{i2} + \cdots + a_{in}\widehat{A}_{in} = \sum_{j=1}^n a_{ij}\widehat{A}_{ij}.$$

Hovoříme o rozvoji determinantu podle  $i$ -tého řádku.

## Příklad

Určete determinant matice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} |B| &= 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \\ 7 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= 8 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - 2 \cdot 7 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = (8 - 14) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = (-6) \cdot (-2) = 12. \end{aligned}$$

Všiměme si, že

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}.$$

# Determinant matice $3 \times 3$

Proveďme Laplaceův rozvoj obecné matice  $3 \times 3$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Dostaneme



$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) \\ &\quad + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \end{aligned}$$

Pozor, pro větší rozměr nelze počítat takto „úhlopříčně“. Ani případy  $n = 2$  a  $n = 3$  nejsou aplikací stejného „úhlopříčného principu“.

Řešíme rovnici  $Ax = b$ , kde  $A$  je čtvercová matice,  $|A| \neq 0$ .

- $|A| \neq 0$  implikuje jednoznačnost řešení.
- $|A| \neq 0$  implikuje existenci  $A^{-1}$ .
- Odtud  $x = A^{-1}b$ , kde  $A^{-1} = |A|^{-1} \cdot A^*$ .

## Věta

*Bud'  $A$  čtvercová matice řádu  $n > 1$  taková, že  $|A| \neq 0$ . Pak soustava  $Ax = b$  má jediné řešení  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ , kde*

$$x_j = \frac{|A_j|}{|A|},$$

*přičemž  $A_j$  je matice vzniklá z matice  $A$  nahrazením jejího  $j$ -tého sloupce sloupcem  $b$ .*

## Příklad (Motivační příklad)

Vyřešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned}2x + 3y + 5z &= 0 \\x + 2y - z &= 4 \\y + 2z &= -1\end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{9}{9} = 1, \quad x_2, x_3 \text{ – sami.}$$



- Spočítat inverzní matici (dle algoritmu).
- Spočítat determinant matic (i matic s parametrem).  
Ovládat obě metody a umět je kombinovat.

## Příklad (3.1)

Určete inverzní matici k matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} .$$

## Příklad (3.2)

Určete determinant matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 8 \end{pmatrix} .$$

## Příklad (3.3)

Pro libovolnou elementární řádkovou operaci nalezněte matici, která ji realizuje pomocí násobení. Tj. pokud  $A \sim B$  je jedna úprava, pak existuje matice  $U$  taková, že  $B = U \cdot A$ .

## Příklad (3.4)

Nechť  $a$  a  $b$  jsou dvě různá reálná čísla a  $n$  je kladné celé číslo. Určete determinant matice  $n \times n$ , která má všechny prvky pod hlavní diagonálou rovny  $b$  a všechny prvky na a nad hlavní diagonálou rovny  $a$ .