

# MB141 – 4. přednáška

## Vektorové prostory, báze, dimenze

Martin Čadek  
s využitím přednášky Ondřeje Klímy pro předmět MB101

Jarní semestr 2022

- Vektorové prostory
- Výběr vhodné generující množiny
- Báze a dimenze podprostorů
- Průnik a součet podprostorů

- Vektory – sčítání, násobky.
- Uvažujme systém  $m$  lineárních rovnic pro  $n$  proměnných a předpokládejme, že jde o soustavu tvaru  $A \cdot x = 0$ , tj.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Součet dvou řešení  $x = (x_1, \dots, x_n)$  a  $y = (y_1, \dots, y_n)$  splňuje

$$A \cdot (x + y) = A \cdot x + A \cdot y = 0$$

a je tedy také řešením.

- Stejně tak zůstává řešením i skalární násobek  $a \cdot x$ .
- Máme tedy podmnožinu  $\mathbb{K}^n$  sestávající ze všech řešení soustavy  $M = \{x \in \mathbb{K}^n \mid A \cdot x = 0\}$  se sčítáním a násobky.

# Vektorové prostory

Nechť  $\mathbb{K}$  je množina reálných čísel  $\mathbb{R}$  nebo racionálních čísel  $\mathbb{Q}$  nebo komplexních čísel  $\mathbb{C}$ .

## Definice

**Vektorový prostor**  $V$  nad polem skalárů  $\mathbb{K}$  je neprázdná množina s operacemi sčítání vektorů  $+$  :  $V \times V \rightarrow V$  a násobení vektoru skalárem  $\cdot$  :  $\mathbb{K} \times V \rightarrow V$ , pro které platí

$$(u + v) + w = u + (v + w) \quad (1)$$

$$u + v = v + u \quad (2)$$

$$\exists 0 \in V : u + 0 = u \quad (3)$$

$$a \cdot (v + w) = a \cdot v + a \cdot w \quad (4)$$

$$\forall u \in V \exists (-u) \in V : u + (-u) = 0 \quad (5)$$

$$(a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v \quad (6)$$

$$a \cdot (b \cdot v) = (a \cdot b) \cdot v \quad (7)$$

$$1 \cdot v = v \quad (8)$$

Rozumné (známé) příklady:

- Vektory v rovině:  $\mathbb{R}^2$ .
- Prostory vyšší dimenze:  $\mathbb{R}^n$ .
- Matice nad polem:  $Mat_{n,m}(\mathbb{R})$ .
- Polynomy omezeného stupně:

$$\mathbb{R}_4[x] = \{a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \mid a_4, a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}\}$$

Obecně  $\mathbb{R}_n[x]$ .

- Množina řešení homogenní soustavy lineárních rovnic.
- $\mathbb{C}$  vektorový prostor nad  $\mathbb{R}$ .

Všechno to jsou reálné vektorové prostory, tj.  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .

Lze uvažovat i příklady  $\mathbb{Q}^n$ ,  $\mathbb{C}^n$ ,  $\mathbb{Q}_n[x]$ , kde  $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$  či  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

Poněkud složitější příklady:

- Polynomy:  $\mathbb{R}[x]$ .
- Funkce:  $F(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ .
- $\mathbb{R}$  vektorový prostor nad  $\mathbb{Q}$ .

Poslední dva jsou trochu divoké.

Příklady množin, které netvoří vektorový prostor.

- $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  nad  $\mathbb{R}$ .
- $M = \{x \in \mathbb{K}^n \mid A \cdot x = b\}$ , pro  $b$  nenulové.
- Čtvercové matice s determinantem 1.
- Polynomy stupně  $n$ .

## Věta

Nechť  $V$  je vektorový prostor nad polem skalárů  $\mathbb{K}$ , dále uvažme skaláry  $a, b, a_i \in \mathbb{K}$  a vektory  $u, v, u_j \in V$ . Potom

- $a \cdot u = 0$  právě když  $a = 0$  nebo  $u = 0$ ,
- $(-1) \cdot u = -u$ ,
- $a \cdot (u - v) = a \cdot u - a \cdot v$ ,
- $(a - b) \cdot u = a \cdot u - b \cdot u$ ,

## Definice

Lineární kombinace vektorů  $u_1, u_2, \dots, u_k$  je vektor

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_k u_k \in V,$$

kde  $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{K}$  jsou skaláry.

Kdy je podmnožina  $U$  vektorového prostoru  $V$  opět vektorovým prostorem? Pokud chceme používat stejné operace, je to právě když lineární kombinace vektorů z  $U$  leží rovněž v  $U$ .

## Definice

Podmnožina  $\emptyset \neq U \subseteq V$  se nazývá **vektorovým podprostorem**, jestliže, spolu se zúženými operacemi sčítání a násobení skaláry, splňuje

$$\forall a, b \in \mathbb{K}, \forall v, w \in U, a \cdot v + b \cdot w \in U.$$

Příklady:

- $\mathbb{R}_n[x] \subseteq \mathbb{R}[x]$ .
- $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ .
- $M = \{x \in \mathbb{K}^n \mid A \cdot x = 0\} \subseteq \mathbb{K}^n$ .
- Sudé polynomy  $\{f \in \mathbb{R}_4[x] \mid f(x) = f(-x)\} \subseteq \mathbb{R}_4[x]$ .



## Definice

Říkáme, že vektory  $v_1, v_2, \dots, v_n$  **generují** vektorový prostor, jestliže každý vektor  $u \in V$  je nějakou jejich lineární kombinací, tj. existují  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ , že

$$u = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$$

Lineární kombinace vektorů  $v_1, v_2, \dots, v_n$  nemusí dávat všechny vektory ve  $V$ . Nicméně tvoří vždy nějaký jeho podprostor. Říkáme mu lineární obal těchto vektorů.

## Definice

**Lineární obal** vektorů  $v_1, v_2, \dots, v_n$  je množina

$$[v_1, v_2, \dots, v_n] = \{a_1 \cdot u_1 + \dots + a_k \cdot u_k \mid a_i \in \mathbb{K}\}.$$

- Cíl: najít co nejmenší základní množinu vektorů, abychom mohli pomocí nich ostatní vektory (jednoznačně) vyjádřit.

## Definice

- Množina vektorů  $M = \{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subseteq V$  ve vektorovém prostoru  $V$  nad  $\mathbb{K}$  se nazývá **lineárně nezávislá**, jestliže pro každou  $k$ -tici skalárů  $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{K}$  platí:

$$a_1 \cdot v_1 + \dots + a_k \cdot v_k = 0 \quad \implies \quad a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0.$$

- $M$  je **lineárně závislá**, jestliže není lineárně nezávislá.
- $M$  je závislá, právě když aspoň jeden z jejích vektorů je vyjádřitelný jako lineární kombinace ostatních.

Základní množina vektorů, aby byla co nejmenší, musí být lineárně nezávislá. Jak to poznáme?

## Příklad

Rozhodněte, zda jsou vektory  $v_1 = (1, 1, 1)$ ,  $v_2 = (-1, 0, 1)$  a  $v_3 = (1, 2, 3)$  lineárně nezávislé (v reálném prostoru  $\mathbb{R}^3$ ).

Soustava  $x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = 0$  s maticí

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

má řešení  $x_1 = -2t$ ,  $x_2 = -t$ ,  $x_3 = t$ . Např. pro  $t = 1$  dostaneme  $-2 \cdot v_1 - v_2 + v_3 = 0$ , tzn.  $v_3 = 2 \cdot v_1 + v_2$ .  
Zkouška:  $2v_1 + v_2 = (2, 2, 2) + (-1, 0, 1) = (1, 2, 3) = v_3$ .  
Odpověď: zadané vektory jsou lineárně závislé.

## Příklad

Rozhodněte, zda jsou vektory  $x^3 - x + 1$ ,  $2x^3 + x^2 - 2x$ ,  $x^4 + x^3 - x$  a  $x^4 - x^2 + 1$  lineárně nezávislé.



$$\begin{array}{l} x^4 : \\ x^3 : \\ x^2 : \\ x^1 : \\ x^0 : \end{array} \left( \begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Odpověď: jsou lineárně závislé.

Postup (obecně): vektory dáme do (sloupců) matice a řešíme příslušnou homogenní soustavu rovnic.

## Definice

- Vektorový prostor, který je generován konečnou množinou vektorů se nazývá **konečněrozměrný**.
- Necht'  $V$  je konečněrozměrný vektorový prostor. Vektory  $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$  tvoří **bázi vektorového prostoru  $V$** , jestliže generují  $V$  a jsou lineárně nezávislé.
- Počet prvků všech bází je stejný a proto jej můžeme nazývat **dimenzí** prostoru  $V$ . Značíme  $\dim V$ .

Triviální podprostor  $\{0\}$  je generován prázdnou množinou, která je "prázdnou" bází. Má tedy nulovou dimenzi.

Je-li  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  báze, pak libovolný vektor  $v \in V$  lze jediným způsobem zapsat jako lineární kombinaci vektorů báze

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n.$$

Koeficienty  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  nazýváme **souřadnice** vektoru  $v$  v dané bází.

- $\mathbb{R}^2$ : báze  $((1, 0), (0, 1))$ ; dimenze 2.
- $\mathbb{R}^n$ : báze  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ , kde  $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ ; dimenze  $n$ .
- $Mat_{n,m}(\mathbb{R})$ : dimenze  $nm$ .

$$Mat_{2,3}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \mid a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R} \right\} = \\ \left\{ a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \right. \\ \left. + e \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + f \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R} \right\}.$$

Báze je  $\left( \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ .

- $\mathbb{R}_4[x]$ : báze  $(x^4, x^3, x^2, x, 1)$ ; dimenze 5.  
( $\mathbb{R}_4[x] = \{a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \mid a_4, \dots, a_0 \in \mathbb{R}\}$ )
- $[(1, 1, 1), (-1, 0, 1), (1, 2, 3)] = [(1, 1, 1), (-1, 0, 1)]$  je podprostor prostoru  $\mathbb{R}^3$  dimenze 2. (Příklad z 9. slajdu.)
- $\mathbb{R}[x]$ : není konečněrozměrný.

## Věta

*Pro konečněrozměrný vektorový prostor  $V$  platí:*

- *Z libovolné konečné množiny generátorů vektorového prostoru  $V$  lze vybrat bázi.*
- *Všechny báze  $V$  mají stejný počet vektorů.*

## Příklad

Nechť  $M = \{(1, 0, 2, 0, 1), (0, 2, 1, -1, 1), (2, -4, 2, 2, 0), (2, 1, 3, 1, 1), (0, 1, 0, 0, 0)\} \subseteq \mathbb{R}^5$ . Z množiny  $M$  vyberte bázi lineárního obalu  $M$  (tj. podprostoru  $V = [M] \subseteq \mathbb{R}^5$ ).

# Příklad – výběr báze z generující množiny

- $v_1 = (1, 0, 2, 0, 1)$ ,  $v_2 = (0, 2, 1, -1, 1)$ ,  $v_3 = (2, -4, 2, 2, 0)$ ,  
 $v_4 = (2, 1, 3, 1, 1)$ ,  $v_5 = (0, 1, 0, 0, 0)$ .
- Postup – odstraňování přebytečných vektorů.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $v_3$  lze vyjádřit pomocí  $v_1$  a  $v_2$ ;  $v_5$  pomocí  $v_1, v_2, v_4$ .
- Báze  $(v_1, v_2, v_4)$ .



Je-li  $V$  konečněrozměrný, je vhodné si pamatovat:

- Z každé množiny generátorů, lze vybrat bázi.
- Báze konečněrozměrných vektorových prostorů jsou právě minimální množiny generátorů.
- Každou lineárně nezávislou množinu lze doplnit do báze.
- Báze konečněrozměrných vektorových prostorů jsou právě maximální lineárně nezávislé množiny.

Důsledek:

## Věta

*Pro libovolný konečněrozměrný vektorový prostor  $V$  a jeho podprostor  $U$  platí:*

$$\dim U \leq \dim V.$$

- Pro přirozená čísla  $m > n$  je libovolná množina  $m$  vektorů v prostoru dimenze  $n$  (např.  $\mathbb{R}^n$ ) lineárně závislá.

## Příklad

Je dán vektorový prostor  $V = \mathbb{R}_4[x]$ . Určete bázi a dimenzi podprostorů  $P$ ,  $Q$ ,  $P \cap Q$ , kde

$$P = \{f \in \mathbb{R}_4[x] \mid (\forall c \in \mathbb{R})(f(c) = f(-c))\},$$

$$Q = [x^3 - x + 1, 2x^3 + x^2 - 2x, \\ x^4 + x^3 - x, x^4 - x^2 + 1].$$



- $P$  má bázi  $(x^4, x^2, 1)$  a dimenzi 3.
- Už jsme spočítali bázi a dimenzi  $Q$  (slajd 10): dimenze je 3 a báze  $(x^3 - x + 1, 2x^3 + x^2 - 2x, x^4 + x^3 - x)$ .
- Hledáme skaláry  $a, b, c, p, q, r$  tak, aby  $ax^4 + bx^2 + c = pv_1 + qv_2 + rv_3$ .
- To vede na řešení následující soustavy.

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

- Řešení:  $q, r$  volné proměnné,  $p = -r - 2q$ .
- V průniku jsou tedy vektory tvaru

$$\begin{aligned} (-r - 2q) \cdot (x^3 - x + 1) + q \cdot (2x^3 + x^2 - 2x) + r \cdot (x^4 + x^3 - x) \\ = q \cdot (x^2 - 2) + r \cdot (x^4 - 1). \end{aligned}$$

- Proto  $P \cap Q$  má bázi  $(x^2 - 2, x^4 - 1)$  a dimenzi 2.

# Průnik a součet podprostorů

Nechť  $U$  a  $W$ , jsou podprostory ve  $V$ ,  $a, b \in \mathbb{K}$ ,  $u, v \in U \cap W$ . Pak  $a \cdot u + b \cdot v \in U \cap W$ . Průnik podprostorů je opět podprostor.

Sjednocení podprostorů není obecně podprostor. Místo sjednocení proto definujeme součet podprostorů.

## Definice

Součtem podprostorů  $U + W$  je množina

$$U + W = \{u + w \in V \mid u \in U, w \in W\}.$$

Je to opět vektorový podprostor, nejmenší, který obsahuje podprostory  $U$  a  $W$ .

## Příklad

Určete bázi a dimenzi podprostoru  $P + Q$ .

- Sjednotíme báze a dostaneme množinu generátorů.
- Z ní vybereme bázi  $P + Q$ .
- To už máme mimoděk spočítáno: báze  $P + Q$  je například  $(x^4, x^2, 1, x^3 - x + 1)$  a dimenze je 4.
- Platí (zkouška):  $\dim P + \dim Q = \dim(P + Q) + \dim(P \cap Q)$ .
- **Závěr:** báze i dimenze  $P + Q$  a  $P \cap Q$  se počítá současně.

## Věta

*Pro  $U, W$  podprostory v konečněrozměrném  $V$  platí*

- $\dim U \leq \dim V$ ,
- $U = V$  právě když  $\dim U = \dim V$ ,
- $\dim U + \dim W = \dim(U + W) + \dim(U \cap W)$ .

Typické příklady:

- Určit bázi a dimenzi podprostoru (užitečné dovednosti: výběr báze ze zadané množiny generátorů, doplnění množiny vektorů na bázi).
- Průnik a součet podprostorů – opět báze a dimenze.

## Příklad (4.1)

Pro každou ze zadaných podmnožin  $M_i$  vektorového prostoru  $V = \mathbb{R}_2[x] = \{a_2x^2 + a_1x + a_0 \mid a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}\}$  rozhodněte, zda je vektorovým podprostorem  $V$ .

- i)  $M_1 = \{f \in \mathbb{R}_2[x] \mid f(1) = f(2)\}$ ;
- ii)  $M_2 = \{f \in \mathbb{R}_2[x] \mid f(1) = 0 \wedge (\forall c \in \mathbb{R})(f(c) = f(-c))\}$ ;
- iii)  $M_3 = \{f \in \mathbb{R}_2[x] \mid f(1) = 0 \wedge f(0) = 1\}$ .

Pokud  $M_i$  není vektorový podprostor, toto tvrzení zdůvodněte. Pokud  $M_i$  je vektorový podprostor, určete dimenzi a nějakou bázi tohoto podprostoru.

## Příklad (4.2)

Ve vektorovém prostoru  $\mathbb{R}^4$  (nad tělesem  $\mathbb{R}$ ) jsou dány vektory  $u_1 = (1, 1, 1, 1)$ ,  $u_2 = (2, -1, 1, 6)$ ,  $u_3 = (0, 3, 1, -4)$  a  $u_4 = (3, 1, 2, 6)$ . Z množiny  $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$  vyberte maximální podmnožinu lineárně nezávislých vektorů a doplňte ji na bázi prostoru  $\mathbb{R}^4$ .

## Příklad (4.3)

Ve vektorovém prostoru  $Mat_{3,3}(\mathbb{R})$  máme následující podmnožiny. Určete, které z nich jsou vektorové podprostory, a určete jejich dimenzi a bázi.

- i) Podmnožina všech matic s jedničkami na diagonále.
- ii) Podmnožina všech matic s nulami na diagonále.
- iii) Podmnožina všech matic s nulovým determinanem.
- iv) Podmnožina všech matic  $X$  pro které platí  $(1, 0, 0) \cdot X = (1, 0, 0)$ .
- v) Podmnožina všech matic  $X$  pro které je součin  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot X = 0$ .