MB141 – 5. přednáška
Lineární zobrazení

Martin Čadek
s využitím přednášky Ondřeje Klímy pro předmět MB101

Jarní semestr 2022

Osnova přednášky

- Definice lineárního zobrazení
- Matice a lineární zobrazení
- Vlastní čísla a vektory

Lineární zobrazení

Definice

Nechť U a V jsou vektorové prostory nad polem skalárů $\mathbb{K}$. Zobrazení $\varphi : U \to V$ se nazývá lineární zobrazení (homomorfismus) jestliže platí:

1. $\forall u, v \in U \ : \ \varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v)$,
2. $\forall a \in \mathbb{K}, \forall u \in U \ : \ \varphi(a \cdot u) = a \cdot \varphi(u)$.

Podívejme se na několik zobrazení z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}$:

- $\varphi((x,y)) = xy$ – není lineární zobrazení.
- $\varphi((x,y)) = x^2 + 3y$ – není lineární zobrazení.
- $\varphi((x,y)) = 3x + 1$ – není lineární zobrazení.
- $\varphi((x,y)) = ax + by$ – je lineární zobrazení. Zde

$$\varphi((x,y)) = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Příklady lineárních zobrazení z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$

Následující zobrazení z $\mathbb{R}^2$ do sebe jsou lineární:

- Prodloužení nebo zkrácení vektoru

$$\varphi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

.

- Rotace o úhel α v kladném smyslu

$$\varphi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

- Reflexe (symetrie) podle osy y

$$\varphi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Obecně, každé zobrazení $\varphi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ je lineární.

Lineární zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^k$

Každé zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ tvaru

$$\varphi(x) = Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

je lineární a naopak, každé lineární zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^k$ je tvaru $\varphi(x) = Ax$, kde A je matice $k \times n$. Odvodíme si to.

$e_1, e_2, \ldots, e_n$ jsou vektory standardní báze v $\mathbb{R}^n$ a $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \ldots, \varphi(e_n)$ jsou vektory v $\mathbb{R}^k$, které bereme jako sloupce. Z linearity zobrazení φ dostáváme

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n) \\ &= x_1 \varphi(e_1) + x_2 \varphi(e_2) + \cdots + x_n \varphi(e_n) \end{aligned}$$

Lineární zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^k$ – dokončení

$$= (\varphi(e_1)\ \varphi(e_2)\ \ldots\ \varphi(e_n)) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Z odvození je vidět, že platí

Věta

Každé lineární zobrazení je jednoznačně určeno svými hodnotami na vektorech nějaké báze.

Příklad

Příklad

Lineární zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ má na třech vektorech hodnoty

$$\varphi\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}, \ \varphi\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\9\end{pmatrix}, \ \varphi\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}.$$

Najděte matici A tvaru 2×3 takovou, že pro všechna $x \in \mathbb{R}^3$ je $\varphi(x) = Ax$.

Sloupce matice A jsou hodnoty zobrazení φ na vektorech $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ a $e_3 = (0, 0, 1)$. Napíšeme tedy zadané vektory $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}^3$ do řádků matice a vedle nich napíšeme hodnoty $\varphi(u_1), \varphi(u_2), \varphi(u_3) \in \mathbb{R}^2$ a tuto matici upravujeme řádkovými úpravami tak, abychom na místě vektorů u_i dostali vektoru e_i. Pak na místě vektorů $\varphi(u_i)$ dostaneme vektory $\varphi(e_i)$:

Příklad - pokračování

Úpravy díky linearitě zobrazení φ totiž fungují takto

$$\left(\begin{array}{c|c} u & \varphi(u) \\ v & \varphi(v) \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{r|r} u+v & \varphi(u)+\varphi(v) \\ cv & c\varphi(v) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{r|r} u+v & \varphi(u+v) \\ cv & \varphi(cv) \end{array}\right)$$

Dostaneme

$$\left(\begin{array}{c|c} u_1 & \varphi(u_1) \\ u_2 & \varphi(u_2) \\ u_3 & \varphi(u_3) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 5 & 9 \\ 1 & 1 & 2 & 5 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cr} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

Tedy $\varphi(e_1) = (1,2)$, $\varphi(e_2) = (0,-1)$, $\varphi(e_3) = (2,3)$, a proto

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Příklad — geometrické zobrazení

Příklad

Zobrazení φ je symetrií prostoru $\mathbb{R}^3$ podle přímky procházející počátkem se směrovým vektorem $(1, 1, 1)$. Napište předpis tohoto zobrazení pomocí maticového násobení.

Prvně najdeme obrazy tří vhodných vektorů. Směrový vektor $u_1 = (1, 1, 1)$ se zobrazí sám na sebe $\varphi(1, 1, 1) = (1, 1, 1)$. Vektory kolmé k u_1 se zobrazí do opačných vektorů, tedy například $\varphi(1, -1, 0) = (-1, 1, 0)$ a $\varphi(0, 1, -1) = (0, -1, 1)$. Nyní postupujeme obdobným způsobem jako v předchozí úloze.

Výsledek:

$$\varphi(x) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Příklad – lineární zobrazení v polynomech

Příklad

Uvažme lineární zobrazení $\varphi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ dané předpisem $\varphi(g) = g' + x \cdot g$. Nalezněte maticové vyjádření tohoto zobrazení v souřadnicích obvyklých bazí $\alpha = (x^2, x, 1)$ a $\beta = (x^3, x^2, x, 1)$. (g' značí derivaci polynomu g.)

Pro $g = ax^2 + bx + c$ máme
$\varphi(g) = (2ax + b) + (ax^3 + bx^2 + cx) = ax^3 + bx^2 + (2a + c)x + b$.
Souřadnicím polynomu g v bázi α, které jsou $(g)_\alpha = (a, b, c)$ přiřadíme souřadnice polynomu $\varphi(g)$ v bázi β, tedy
$(\varphi(g))_\beta = (a, b, 2a + c, b)$.
Hledaná matice A má vlastnost
$A \cdot (a, b, c)^T = (a, b, 2a + c, b)^T$. Proto

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vlastní čísla a vektory

V příkladě o symetrii podle přímky byly pro nás užitečné vektory splňující rovnici $\varphi(u) = \lambda \cdot u$ pro vhodný skalár λ (konkrétně $\lambda = 1, \lambda = -1$). Takové vektory hrají důležitou roli i v mnoha dalších úlohách, proto jim dáme zvláštní jméno.

Definice

Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a $\varphi : V \to V$ je lineární zobrazení. Skaláry λ vyhovující rovnici

$$\varphi(u) = \lambda \cdot u$$

pro nenulový vektor $u \in V$ nazýváme vlastní čísla (hodnoty) zobrazení φ, příslušné vektory $u \neq 0$ nazýváme vlastní vektory zobrazení φ.

Vlastní čísla a vektory – příklad

Uvažujme matici A a vektory u a v:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Platí

$$A \cdot u = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -u,$$

$$A \cdot v = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = 2 \cdot v.$$

Jsou tedy$\lambda_1 = -1$ a $\lambda_2 = 2$ vlastní čísla matice A a jejich příslušné vlastní vektory jsou u (proλ_1) a v (pro λ_2).
Jiná vlastní čísla nejsou, jak uvidíme za chvíli.

Jak hledat vlastní čísla a vektory?

Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ dimenze n a $\varphi : V \to V$ je lineární zobrazení. Postup při hledání vlastních čísel a vektorů je následující:

1) Rovnost $\varphi(u) = \lambda \cdot u$ můžeme zapsat v souřadnicích ve zvolené bázi α jako soustavu $Ax = \lambda \cdot x$, kde x jsou souřadnice hledaného vlastního vektoru zapsané do sloupce a A je maticové vyjádření lineárního zobrazení v bázi α. Tuto soustavu přepišme do tvaru homogenní soustavy rovnic $(A - \lambda E)x = 0$.
2) Taková soustava rovnic má netriviální řešení $x \neq 0$ právě tehdy, když $\det(A - \lambda \cdot E) = 0$.
3) $\det(A - \lambda \cdot E)$ je polynom stupně n (v proměnné λ), tzv. charakteristický polynom. Jeho kořeny jsou hledaná vlastní čísla.
4) Vlastní vektory najdeme řešením homogenní soustavy $(A - \lambda E)x = 0$.

Kořeny polynomů

Uvažujme polynom stupně $n \geq 1$

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots a_1 x + a_0, \quad \text{kde} \ \ a_n \neq 0.$$

Číslo x_0 se nazývá kořenem tohoto polynomu, jestliže

$$p(x_0) = 0.$$

Číslo x_0 je kořenem polynomu $p(x)$, právě když platí

$$p(x) = (x - x_0) q(x),$$

kde $q(x)$ je polynom stupně $n - 1$. Kořen x_0 má násobnost k, jestliže k je největší číslo s vlastností

$$p(x) = (x - x_0)^k r(x),$$

kde $r(x)$ je polynom stupně $n - k$. V tomto případě je $r(x_0) \neq 0$.

1. příklad

Příklad

Najděte vlastní čísla a vlastní vektory lineárního zobrazení

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi(x) = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Spočítáme charakteristický polynom

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & -3 \\ 4 & 5-\lambda & -4 \\ 6 & 4 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \ \dots \ = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6.$$

Jestliže má polynom s celočíselnými koeficienty celočíselný kořen, musí tento kořen dělit koecicient u $\lambda^0 = 1$, v našem případě číslo 6. Hledáme ho tedy mezi děliteli čísla 6, tj. mezi čísly $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$.

1. příklad – pokračování

Dosazením zjistíme, že $\lambda_1 = 1$ je kořen. Charakteristický polynom vynásobený -1 vydělíme $\lambda - 1$. Dostaneme

$$\lambda^3 - \lambda^2 + 11\lambda - 6 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 5\lambda + 6).$$

Kořeny kvadratického polynomu $\lambda^2 - 5\lambda + 6$ umíme spočítat. Jsou $\lambda_2 = 2$ a $\lambda_3 = 3$. Vlastní vektory k $\lambda_1 = 1$ najdeme řešením homogenní soustavy $(A - \lambda_1 E)x = 0$. Ta má matici soustavy

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 4 & 4 & -4 \\ 6 & 4 & -5 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Všechny vlastní vektory k vlastnímu číslu 1 jsou tedy $p(1, 1, 2)$ s $p \neq 0$. Analogicky najdeme vlastní vektory k vlastnímu číslu 2, jsou to $q(1, 0, 1)$, $q \neq 0$, a vlastnímu číslu 3, ty jsou $s(1, 2, 3)$, $s \neq 0$.

1. příklad – dokončení

Všimněte si, jak vypadá vyjádření zobrazení φ v souřadnicích báze α tvořené vlastními vektory $u_1 = (1,1,2)$, $u_2 = (1,0,1)$, $u_3 = (1,2,2)$. Dostáváme totiž

$$\begin{aligned}\varphi(y_1 u_1 + y_2 u_2 + y_3 u_3) &= y_1 \varphi(u_1) + y_2 \varphi(u_2) + y_3 \varphi(u_3) \\ &= y_1 u_1 + y_2 \cdot 2u_2 + y_3 \cdot 3u_3.\end{aligned}$$

Tedy maticové vyjádření zobrazení φ v souřadnicích báze tvořené vlastními vektory je

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že použití této báze nám významně pomůže zjednodušit popis zobrazení.

2. příklad

Příklad

Najděte vlastní čísla a vektory zobrazení

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi(x) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -10 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Charakteristický polynom je

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -10 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(-3-\lambda) + 10 = \lambda^2 + 4\lambda + 13.$$

Tento kvadratický polynom nemá reálné kořeny, neboť jeho diskriminant je záporný (-36). Zobrazení tedy nemá reálná vlastní čísla ani vlastní vektory. (Má však komplexní vlastní čísla $-2 \pm 3\,\mathrm{i}$.)

Podprostor vlastních vektorů

- Je-li u vlastní vektor matice A příslušející vlastnímu číslu λ, potom libovolný jeho (nenulový) násobek je také vlastní vektor příslušející témuž vlastnímu číslu, protože

$$A\,(a\,u) = a\,(Au) = a\,(\lambda\,u) = \lambda\,(a\,u).$$

- Podobně, jsou-li u, v vlastní vektory matice A příslušející vlastnímu číslu λ (kde $u \neq -v$), potom jejich součet je také vlastní vektor příslušející témuž vlastnímu číslu, protože

$$A(u+v) = (Au) + (Av) = (\lambda\,u) + (\lambda\,v) = \lambda\,(u+v).$$

- Vlastní vektory příslušející témuž vlastnímu číslu tedy tvoří (společně s nulovým vektorem) podprostor vektorového prostoru $\mathbb{K}^n$. To také zdůvodňuje terminologii „vlastní prostor“.

3. příklad – podprostor vlastních vektorů

Příklad

Určete vlastní čísla a vlastní vektory matice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2.$$

Proto je $\lambda_1 = 2$ (násobnosti 2) jediné vlastní číslo. Výpočet vlastního prostoru pro $\lambda_1 = 2$:

$$(A - \lambda_1 E \,|\, 0) = (A - 2E \,|\, 0) = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Vlastní prostor pro $\lambda_1 = 2$ je $\{(t, 0) \mid t \in \mathbb{R}\} = [(1, 0)]$.

Obecné poznatky

Věta

Vlastní vektory lineárního zobrazení $\varphi : V \to V$ *příslušné různým vlastním hodnotám jsou lineárně nezávislé.*

Věta

Jestliže existuje n *navzájem různých kořenů* λ_i *charakteristického polynomu zobrazení* $\varphi : V \to V$, $\dim V = n$, *pak existuje báze* V *složená výhradně z vlastních vektorů a v této bázi má* φ *diagonální matici (s vlastními čísly na diagonále).*

Věta

Symetrické matice tvaru $n \times n$ *nad* $\mathbb{R}$ *mají* n *vlastních reálných čísel. (Počítáno včetně násobností.)*

Požadavky

- Umět určit matici lineárního zobrazení ve standardní bázi ze znalosti hodnot lineárního zobrazení na vektorech nějaké báze.
- Umět spočítat vlastní čísla a vlastní vektory.

Domácí úloha

Příklad (5.1)

Nechť φ je zobrazení prostoru $\mathbb{R}^3$ do sebe a to symetrie podle roviny zadané rovnicí $x_1 - x_3 = 0$. Určete matici A takovou, že $\varphi(x) = Ax$ v souřadnicích standardní báze.

Příklad (5.2)

Nechť je dána matice A lineárního zobrazení vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$ do sebe, o níž víme, že má vlastní číslo 2. Určete všechna vlastní čísla a jim příslušné podprostory (vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$) sestávající z jejich vlastních vektorů.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 1 \\ -1 & -4 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$