

MB141 – 6. přednáška

Skalární součin

Martin Čadek
s využitím přednášky Ondřeje Klímy pro předmět MB101

Jarní semestr 2022

- Skalární součin
- Ortonormální báze
- Ortogonální doplněk a kolmá projekce
- Ortogonální transformace a matice

Skalární součin v \mathbb{R}^2 a v \mathbb{R}^3

Skalární součin přiřazuje dvěma vektorům reálné číslo. Na střední škole jste si ho definovali na \mathbb{R}^2 předpisem

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

a na \mathbb{R}^3 podobným předpisem

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3.$$

Takto definované zobrazení má tyto vlastnosti

- 1) $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle$,
- 2) $\langle \vec{x} + \vec{z}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{z}, \vec{y} \rangle$,
- 3) $\langle a\vec{x}, \vec{y} \rangle = a\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$,
- 4) $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle > 0$ pro všechny vektory $\vec{x} \neq 0$.

Ukazuje se jako výhodné definovat skalární součin na libovolném reálném vektorovém prostoru jenom pomocí těchto vlastností.

Skalární součin – definice a příklady

(Šipky nad vektory už nebudeme psát.)

Definice

Skalární součin na vektorovém prostoru V nad reálnými čísly je zobrazení $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ takové, že

- 1) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$,
- 2) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$,
- 3) $\langle a \cdot u, v \rangle = a \cdot \langle u, v \rangle$,
- 4) $\langle v, v \rangle \geq 0$ a je roven 0 pouze při $v = 0$.

Příklady:

- My budeme obvykle pracovat s tzv. standardním skalárním součinem na $V = \mathbb{R}^n$

$$\langle (x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n.$$

Skalární součin - příklady

- Na \mathbb{R}^n existuje mnoho dalších skalárních součinů. Např. na \mathbb{R}^2 zadává předpis

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + 2x_2 y_2$$

také skalární součin. Poslední vlastnost z definice je splněna, neboť

$$\langle x, x \rangle = x_1^2 + 2x_1 x_2 + 2x_2^2 = (x_1 - x_2)^2 + x_2^2 > 0$$

pro $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$.

- Na prostoru všech polynomů $V = \mathbb{R}[x]$ můžeme skalární součin zadat pomocí určitého integrálu

$$\langle u, v \rangle = \int_0^1 u(t) \cdot v(t) dt.$$

Velikost a kolmost vektorů

Velikost vektoru v se definuje jako

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

Vektory $u, v \in V$ se nazývají **ortogonální** (**kolmé**), jestliže

$$\langle u, v \rangle = 0.$$

Píšeme $u \perp v$.

Věta (Cauchyova nerovnost)

Pro každé dva vektory u a $v \in V$ platí nerovnost

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|.$$

Rovnost nastane, právě když jeden vektor je násobkem druhého.

Jestliže jsou vektory u a v nenulové, platí podle Cauchyovy nerovnosti

$$-1 \leq \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|} \leq 1.$$

Proto existuje právě jedno číslo $\alpha \in [0, \pi]$ takové, že

$$\cos \alpha = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}.$$

Toto číslo nazýváme **odchylnou vektorů u a v** .

Ortogonalní a ortonormální báze

Báze prostoru V složená z navzájem kolmých vektorů se nazývá **ortogonalní báze**.

Mají-li bázevé vektory navíc jednotkovou velikost, mluvíme o **ortonormální bázi**. Název pochází z toho, že vektory jednotkové velikosti se nazývají normované.

Standardní úlohou je najít v podprostoru generovaném několika vektory nejdříve ortogonalní a potom ortonormální bázi.

Příklad

Nalezněte ortogonalní a ortonormální bázi podprostoru $M = [(1, 1, 1, 1), (1, 0, 0, 3), (1, 2, 1, 0)]$ vektorového prostoru \mathbb{R}^4 .

Označte tyto vektory postupně v_1 , v_2 a v_3 . Chceme je postupně nahradit navzájem kolmými vektory u_1 , u_2 , u_3 .

- Začneme tím, že položíme $u_1 = v_1 = (1, 1, 1, 1)$.

Pokračování příkladu

- Vektor u_2 hledáme ve tvaru $u_2 = v_2 - au_1$. Rovnost vynásobíme skalárně vektorem u_1

$$0 = \langle u_2, u_1 \rangle = \langle v_2, u_1 \rangle - a\langle u_1, u_1 \rangle.$$

Odtud spočítáme $a = \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} = \frac{4}{4} = 1$. Tedy

$$u_2 = v_2 - 1 \cdot u_1 = (1, 0, 0, 3) - (1, 1, 1, 1) = (0, -1, -1, 2).$$

- Vektor u_3 hledáme ve tvaru $u_3 = v_3 - bu_2 - cu_1$. Rovnost vynásobíme skalárně vektorem u_1

$$0 = \langle u_3, u_1 \rangle = \langle v_3, u_1 \rangle - b\langle u_2, u_1 \rangle - c\langle u_1, u_1 \rangle.$$

Protože $\langle u_2, u_1 \rangle = 0$, spočítáme $c = \frac{\langle v_3, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} = 1$.

Obdobně rovnost vynásobíme skalárně vektorem u_2

$$0 = \langle u_3, u_2 \rangle = \langle v_3, u_2 \rangle - b\langle u_2, u_2 \rangle - c\langle u_1, u_2 \rangle.$$

Protože $\langle u_1, u_2 \rangle = 0$, spočítáme $b = \frac{\langle v_3, u_2 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} = -\frac{1}{2}$, tedy $u_3 = (0, 1/2, -1/2, 0)$.

Velikosti vektorů jsou $\|u_1\| = 2$, $u_2 = \sqrt{6}$, $u_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Ortonormální báze podprostoru M je tedy

$$\frac{1}{2}(1, 1, 1, 1), \frac{1}{\sqrt{6}}(0, -1, -1, 2), \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, -1, 0).$$

Výše uvedený postup lze aplikovat na libovolnou k -tici lineárně nezávislých vektorů v_1, v_2, \dots, v_k , abychom dostali k -tici navzájem ortogonálních vektorů. Nazývá se **Grammův–Schmidtův ortogonalizační proces**.

Ortogonální doplněk a kolmá projekce

Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem a U jeho podprostor. Množina všech kolmých vektorů k vektorům z U

$$U^\perp = \{v \in V \mid \langle v, u \rangle = 0 \text{ pro všechna } u \in U\}$$

se nazývá ortogonální doplněk podprostoru U ve V . Jde opět o vektorový podprostor. Platí, že $U + U^\perp = V$ a $U \cap U^\perp = \{0\}$. To je ekvivalentní s tím, že pro každý vektor $v \in V$ existuje právě jeden vektor $u \in U$ a právě jeden vektor $w \in U^\perp$ tak, že

$$v = u + w.$$

Vektor u nazýváme **kolmou projekcí** vektoru v do U . Kolmá projekce do podprostoru U je lineární zobrazení $P_U : V \rightarrow V$, které zobrazuje vektory $u \in U$ na sebe a vektory $w \in U^\perp$ na nulový vektor. V terminologii z předchozí přednášky má kolmá projekce vlastní číslo 1 s vlastním podprostorem U a vlastní číslo 0 s vlastním podprostorem U^\perp . Výpočet kolmé projekci ukážeme na příkladu.

Příklad

V prostoru \mathbb{R}^5 se standardním skalárním součinem najděte kolmou projekci vektoru $v = (0, 2, 6, 0, 5)$ do podprostoru $U = [u_1 = (1, 0, 1, 0, 2), u_2 = (-1, 2, 3, 2, 1)]$ a jeho ortogonálního doplňku U^\perp .

Kolmou projekci vektoru v do U hledáme ve tvaru

$$P_U v = au_1 + bu_2.$$

Protože $v = P_U v + P_{U^\perp} v$, musí být $v - P_U v \in U^\perp$. Tedy $v - P_U v$ je kolmé na vektory $u_1, u_2 \in U$. Dostáváme tedy rovnice

$$\langle v - P_U v, u_1 \rangle = \langle v - au_1 - bu_2, u_1 \rangle = 0,$$

$$\langle v - P_U v, u_2 \rangle = \langle v - au_1 - bu_2, u_2 \rangle = 0.$$

Po úpravě

$$a\langle u_1, u_1 \rangle + b\langle u_2, u_1 \rangle = \langle v, u_1 \rangle,$$

$$a\langle u_1, u_2 \rangle + b\langle u_2, u_2 \rangle = \langle v, u_2 \rangle.$$

Vypočteme příslušné skalární součiny

$$6a + 4b = 16,$$

$$4a + 19b = 27.$$

Řešení je $a = 2$ a $b = 1$. Kolmá projekce je tedy

$$P_U v = 2u_1 + u_2 = (1, 2, 5, 2, 5).$$

Dimenze ortogonálního doplňku U^\perp je 3. Kolmou projekci do U^\perp nejrychleji spočítáme jako rozdíl

$$P_{U^\perp} v = v - P_U v = (-1, 0, 1, -2, 0).$$

Ortogonalní transformace

Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem. Lineární zobrazení $\varphi : V \rightarrow V$ nazýváme **ortogonalní transformací**, jestliže pro všechny dvojice vektorů $u, v \in V$ platí

$$\langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle = \langle u, v \rangle.$$

Říkáme, že φ zachovává skalární součin. φ zachovává rovněž velikosti vektorů, neboť

$$\|\varphi(v)\| = \sqrt{\langle \varphi(v), \varphi(v) \rangle} = \sqrt{\langle v, v \rangle} = \|v\|.$$

Nechť $V = \mathbb{R}^n$ se standardním skalárním součinem. Skalární součin dvou vektorů x a $y \in \mathbb{R}^n$, které bereme jako sloupce velikosti n můžeme zapsat pomocí maticového násobení takto:

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = (x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x^T \cdot y.$$

Nechť $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\varphi(x) = Ax$, kde A je matice $n \times n$, je ortogonalní transformace. Potom podle definice platí

(E je jednotková matice)

$$x^T \cdot E \cdot y = x^T \cdot y = \langle x, y \rangle = \langle Ax, Ay \rangle = (Ax)^T \cdot Ay = x^T \cdot (A^T \cdot A) \cdot y$$

pro všechna $x, y \in \mathbb{R}^n$. Proto je $A^T A = E$, tedy inverzní matice k matici A je transponovaná matice. Takovým maticím říkáme **ortogonalní matice**. Jejich definice je ekvivalentní s podmínkami

- $AA^T = E$.
- Řádky matice A tvoří ortonormální bázi v \mathbb{R}^n .
- Sloupce matice A tvoří ortonormální bázi v \mathbb{R}^n .

Podstatné vlastnosti ortogonalních matic zachycuje následující

Věta

Determinant ortogonalní matice je roven ± 1 . Vlastní čísla ortogonalní matice mají absolutní hodnotu 1. To platí i komplexní vlastní čísla. Jsou-li vlastní čísla reálná, tak jsou ± 1 .

Lineární shodné transformace v rovině

Jsou to ortogonální transformace $\varphi(x) = Ax$, kde A je ortogonální matice 2×2 . Mohou nastat tyto možnosti:

- 1) $\det A = 1$. Potom je φ **otočení** proti směru hodinových ručiček kolem počátku o úhel α . Ten je určen jednoznačně prvním sloupcem matice, která má tvar

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

- 2) $\det A = -1$. Potom je φ **symetrií podle osy** procházející počátkem se směrovým vektorem rovným vlastnímu vektoru k vlastnímu číslu 1 . Další vlastní číslo je -1 a jeho vlastní vektor $v = (a, b)$ je kolmý ke směrovému vektoru osy. Tedy osa symetrie má rovnici

$$ax_1 + bx_2 = 0.$$

Lineární shodné transformace v prostoru \mathbb{R}^3

Jsou to ortogonální transformace $\varphi(x) = Ax$, kde A je ortogonální matice 3×3 . Charakteristický polynom matice A je stupně 3 , a proto má aspoň jeden reálný kořen. Tedy φ má vlastní číslo 1 nebo -1 . Opět rozlišíme dvě možnosti:

- 1) $\det A = 1$. Potom má φ vlastní číslo 1 a je **otočením kolem osy** procházející počátkem se směrovým vektorem rovným vlastnímu vektoru v k vlastnímu číslu 1 . Úhel otáčení α zjistíme tak, že si vezmeme nějaký vektor $u \neq 0$ kolmý k v a spočítáme, jaký úhel svírá s vektorem $\varphi(u) = Au$:

$$\cos \alpha = \frac{\langle Au, u \rangle}{\|u\| \|Au\|}.$$

- 2) $\det A = -1$. V tomto případě má φ vlastní vektor -1 a je **složením dvou zobrazení**. Prvé je **otočení kolem osy** se směrovým vektorem rovným vlastnímu vektoru v k vlastnímu číslu -1 a druhé je **symetrie podle roviny** procházející počátkem a kolmé k vektoru v .

Úhel otáčení zjistíme stejným způsobem jako v předchozím případě.

Příklad

Zjistěte, jakou geometrickou transformaci popisuje zobrazení

$$\varphi(x) = Ax, \text{ kde } A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pozorně spočítáme, že $\det A = \frac{1}{27} \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} = -1$.

Tedy A musí mít podle předchozího vlastní číslo -1 . Nemusíme tedy počítat charakteristický polynom, ale rovnou spočítáme vlastní vektor k -1 řešením soustavy $(A + E)v = 0$. Zjistíme, že $v = p(1, 1, 2)$, $p \in \mathbb{R} - \{0\}$. Vezmeme nějaký kolmý vektor, např. $u = (1, -1, 0)$. Spočítáme $\varphi(u) = Au = u$. Tedy úhel otáčení je nulový, proto φ popisuje symetrii podle roviny

procházející počátkem kolmé k vektoru $v = (1, 1, 2)$. Ta má rovnici $x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$.

Příklad

Zjistěte, jakou geometrickou transformaci popisuje zobrazení

$$\varphi(x) = Bx, \text{ kde } B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Analogicky jako v předchozí úloze

$$\det B = \frac{1}{27} \det \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} = -1. \text{ Tedy } B \text{ má vlastní číslo}$$

-1 . Najdeme vlastní vektor k -1 řešením soustavy

$(B + E)v = 0$. Zjistíme, že $v = p(1, 1, 1)$. Vezmeme nějaký kolmý vektor, např. $u = (1, -1, 0)$. Spočítáme $Bu = (-1, 0, 1)$.

Pro úhel otáčení je $\cos \alpha = \frac{\langle u, Bu \rangle}{\|u\| \|Bu\|} = -\frac{1}{2}$, tedy $\alpha = \frac{2}{3}\pi$, tj. 120° .

Dokončení příkladu II

Transformace φ je tedy složením symetrie podle roviny $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ a otočení kolem přímky procházející počátkem se směrovým vektorem $(1, 1, 1)$ o úhel $\frac{2}{3}\pi$ (ve směru od vektoru $(1, -1, 0)$ k vektoru $(-1, 0, 1)$).

Typické příklady:

- Najít v podprostoru ortogonální, resp. ortonormální bázi.
- Najít ortogonální doplněk podprostoru v \mathbb{R}^n .
- Spočítat kolmou projekci do podprostoru v \mathbb{R}^n .
- Zjistit, jakou geometrickou transformaci popisuje zobrazení zadané ortogonální maticí 2×2 a 3×3 .

Příklad (6.1)

Grammovým-Schmidtovým ortogonalizačním procesem sestrojte ortogonální bázi podprostoru M v prostoru \mathbb{R}^4 , je-li

$$M = [(1, 2, 2, -1), (1, 1, -5, 3), (0, 1, 1, 0)].$$

Určete nějakou ortonormální bázi podprostoru M a doplňte ji na ortonormální bázi prostoru \mathbb{R}^4 .

Příklad (6.2)

V souřadnicích standardní báze je zobrazení φ vektorového prostoru \mathbb{R}^3 do sebe určeno maticí

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Určete, o jaké zobrazení se jedná.