③ INVERZNÍ MATICE

$E_n \quad n \times n \quad \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & & & \ddots & 1 \end{pmatrix}$

$A \quad k \times n \qquad E_k \cdot A = A$

$\qquad\qquad\qquad A \cdot E_n = A$

A je čtvercová matice $n \times n$
Inv. matice k A je B, jestliže

$$A \cdot B = E = B \cdot A$$

$a, x, b \in \mathbb{R}$
$a \neq 0$

$$a \cdot x = b \quad \Big/ \cdot \frac{1}{a} = a^{-1}$$

$$a^{-1}(a \cdot x) = a^{-1} b$$
$$(a^{-1} a) \cdot x = a^{-1} b$$
$$1 \cdot x = a^{-1} b = \frac{b}{a}$$
$$x = \frac{b}{a}$$

$$A \cdot x = b \qquad A \quad n \times n$$

nechť existuje
inverzní matice
A^{-1}

Násobíme zleva maticí A^{-1}

$$\underbrace{A^{-1} A}\, x = A^{-1} b$$
$$E\, x = A^{-1} b$$
$$\boxed{x = A^{-1} b}$$

Ne ke všem nenulovým maticím existují inverzní

$$\begin{array}{c} \\ \\ i \to \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ 2 & 3 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & \end{pmatrix} \cdot B = \begin{array}{c} \\ \to \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \end{pmatrix} \neq E$$

Pokud existuje inverze, je jediná, značíme A^{-1}.

Výpočet – algoritmus založený na Gaussově eliminaci

A $n \times n$, hledáme matici X $n \times n$ tak, že

$$A \cdot X = E$$

$$A \cdot s_1(X) = s_1(E)$$
$$A \cdot s_2(X) = s_2(E)$$
$$\text{- - - - - - -}$$

$$(A \mid s_1 E) \quad (A \mid s_2 E) \quad \dots \quad (A \mid s_n E)$$

$$(A \mid E) \sim \text{řádk. úpravy} \sim (S \mid B)$$

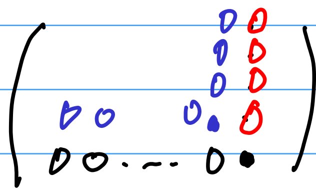
schod. tvar

Má-li S nulový řádek, neexistuje S^{-1}. S^{-1} existuje, právě když existuje A^{-1}.

S nemá nulový řádek $\Rightarrow$ soustava má jednoznačné řešení

Provedeme zpětnou Gaussovu eliminaci

$$\left(S \mid B\right) \sim \left(\text{diag. matice} \mid C\right)$$



$$\sim \left(E \mid A^{-1}\right)$$

$$x_1 = b_1$$

$$x_2 =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

A

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 9 & 18 & -9 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & -9 & 63 & 9 & -18 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 9 & 18 & 0 & 1 & 7 & 1 \\ 0 & -9 & 0 & 2 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & 9 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 9 & 0 & 0 & 5 & -1 & -13 \\ 0 & -9 & 0 & 2 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & 9 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5/9 & -1/9 & -13/9 \\ 0 & 1 & 0 & -2/9 & 4/9 & 7/9 \\ 0 & 0 & 1 & 1/9 & -2/9 & 1/9 \end{array}\right)$$

A^{-1}

Algoritmus pro výpočet inv. matice k A

$$(A \mid E) \underset{\text{operace}}{\overset{\text{elem. řádk.}}{\sim \;\cdots\; \sim}} (S \mid B)$$

schod. tvar

① S má nulový řádek $\Rightarrow$ A^{-1} neexistuje

② S nemá nulový řádek $\Rightarrow$ A^{-1} existuje

Provádíme zpětnou Gaussovu eliminaci

$$(S \mid B) \underset{\text{operace zdola}}{\overset{\text{elem. řádk.}}{\sim \;\cdots\; \sim}} (E \mid A^{-1})$$

Determinant matice

Už jsme definovali

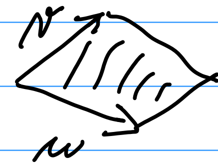
$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$Ax = b$ $\quad$ A 2×2 má jediné řešení právě když $\det A \neq 0$

- orientace vektorů $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ $v = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$

je znaménko $\det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$

- $\det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$ je orientovaný obsah rovnoběžníku



A $n \times n$, $n \in \mathbb{N}$

Této matici přiřadíme číslo
$$\det A = |A|.$$

Nebudeme ji ale počítat!

Det lze definovat formulkou

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}\sigma \, a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} \cdots a_{n\sigma_n}$$

(matice A typu $n \times n$

Pravidla pro výpočet determinantu

① Vznikne-li z matice A matice B výměnou dvou řádků, je
$$\det B = -\det A$$

② Vznikne-li z matice A matice B vynásobením jednoho řádku číslem c, pak
$$\det B = c \det A$$

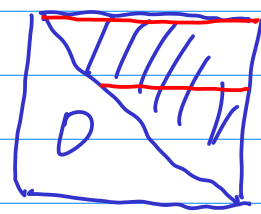
③ Vznikne-li B a A přičtením c-násobku nějakého řádku k jinému
$$\det B = \det A$$

(4) $$\det E = 1$$

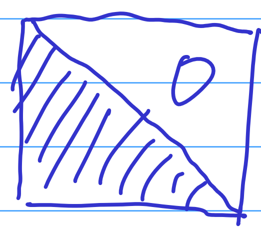
(5) $$\det A^T = \det A$$

Odvozená pravidla pro počítání:

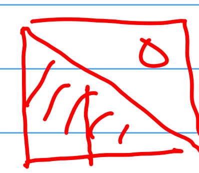
(6) Determinant matice se schod. tvaru (čtvercové) je roven součinu čísel na diagonále.

A = 

Schod. tvar čtvercové matice = horní trojúhelníková matice



Dolní trojúhelníková matice

A horní Δ ⇒ A^T je 

(7) Determinant matice, která obsahuje nulový řádek, je 0.

(7B) det matice A se při sloupcových úpravách chová stejně jako při řádkových

(8) $$\det \left(\begin{array}{c:c} \overbrace{A}^{k} & \overbrace{C}^{n-k} \\ \hdashline \underset{\text{nulová}}{0} & B \end{array}\right) \begin{array}{l} \}\,k \\ \}\,n-k \end{array} = \det A \cdot \det B$$

Příklad: Ukážeme, že

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ spočítaný podle}$$

pravidel je $\quad ad - bc$.

$a \neq 0$ $\qquad$ od 2. ř. odečteme $\frac{c}{a}$ násobek 1.

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d - \frac{c}{a} \cdot b \end{pmatrix}$$

$$= a \cdot \left(d - \frac{c}{a} b \right) = ad - bc$$

$a = 0 \quad c \neq 0$

$$\det \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix} = - \det \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

$$= - bc = \underset{\overset{\parallel}{0}}{a} \cdot d - b \cdot c$$

$a = 0, \ c = 0$ $\qquad \det \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = 0 d = 0$

$$= 0 \cdot d - 0 \cdot b$$

11^{00}

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = - \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= - \det \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 2 & -1 \\ \hline 0 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right) = - \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$= -1\cdot(-1)\cdot 9 = \underline{\underline{9}}$$

$$= -\det(1)\cdot\det\begin{pmatrix}-1 & 7\\ 1 & 2\end{pmatrix} =$$

$$= -\det\begin{pmatrix}-1 & 7\\ 1 & 2\end{pmatrix} = -\left(-1\cdot 2 - 1\cdot 7\right) = \underline{\underline{9}}$$

Další příklad

$$\det\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 3 & 4 & 0\\ 0 & 5 & 6 & 0\\ 7 & 0 & 0 & 8\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 3 & 4 & 0\\ 0 & 5 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -6\end{pmatrix}$$

$$= \det(1)\ \det\begin{pmatrix}3 & 4 & 0\\ 5 & 6 & 0\\ 0 & 0 & -6\end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix}3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix}\cdot\det(-6) =$$

$$\left(3\cdot 6 - 5\cdot 4\right)\cdot(-6) = (-2)(-6) = 12$$

Cauchyova věta (čti [koši])

$$\det(A\cdot B) = \det A\cdot\det B$$

Existuje-li k A matice inverzní

$$A\cdot A^{-1} = E \qquad /\det$$

$$\det(A\cdot A^{-1}) = \det E = 1$$

$$\det A \cdot \det A^{-1} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \det A \neq 0.$$

$\boxed{\text{Věta:}}$

Pro každou matici A typu $n \times n$ jsou následující tvrzení ekvivalentní

(1) A^{-1} existuje

(2) $\det A \neq 0$

(3) Pro každou pravou stranu $b \in \mathbb{R}^n$ má soustava $Ax = b$ jediné řešení.

Všimněme $(1) \Rightarrow (2)$

$(1) \Rightarrow (3)$ $\quad x = A^{-1} b$

VÝPOČET DETERMINANTU pomocí LAPLACEOVA ROZVOJE

$A = (a_{ij})$ matice $n \times n$

A_{ij} bude matice $(n-1) \times (n-1)$ která vznikne z A vypuštěním i-tého řádku a j-tého sloupce

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cancel{3} & 4 \\ \cancel{5} & \cancel{6} & \cancel{7} & \cancel{8} \\ 9 & 10 & \cancel{11} & 12 \\ 13 & 14 & \cancel{15} & 16 \end{pmatrix}$$

$$a_{23} = 7 \qquad A_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 9 & 10 & 12 \\ 13 & 14 & 16 \end{pmatrix}$$

Číslo $\hat{A}_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$

algebraický doplněk čísla a_{ij}

$$= (-1)^{i+j} \, |A_{ij}|$$

$$\hat{A}_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 9 & 10 & 12 \\ 13 & 14 & 16 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 9 & 10 & 12 \\ 13 & 14 & 16 \end{vmatrix}$$

Laplaceův rozvoj podle i-tého řádku

$$\det A = a_{i1} \cdot \hat{A}_{i1} + a_{i2} \hat{A}_{i2} + \dots + a_{in} \hat{A}_{in}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \hat{A}_{ij}$$

rozvoj podle 2. řádku

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} = 5 \cdot \hat{A}_{21} + 6 \cdot \hat{A}_{22} + 7 \cdot \hat{A}_{23} + 8 \cdot \hat{A}_{24}$$

Vhodná matice na použití Lapl. rozvoje

rozvoj podle 1. řádku

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} +$$

$$+ \; 0 \cdot \hat{A}_{12} + 0 \cdot \hat{A}_{13} + 2 \cdot (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \\ 7 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot \left(8 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \right) +$$

$$2(-1) \left(7 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= 8 \cdot (3 \cdot 6 - 5 \cdot 4) - 2 \cdot 7 \, (3 \cdot 6 - 5 \cdot 4)$$

$$= -16 - 14 \cdot (-2) = \underline{\underline{12}}$$

Lapl. rozvoj matice 3×3 podle 1. řádku

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11} (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ \; a_{12} (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} (a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32})$$

$$- a_{12} (a_{21} a_{33} - a_{23} a_{31})$$

$$+ a_{13} (a_{21} a_{32} - a_{22} a_{31}) =$$

$$= a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32}$$

$- a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{13} a_{22} a_{31}$

Saarusovo pravidlo pouze pro det matic 3×3

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{23} \end{matrix}$$

! Pro matice $n \times n$, $n \geq 4$ žádné „Saarusovo pravidlo" neplatí !

Cramerovo pravidlo

A $n \times n$, $\det A \neq 0$

Soustava $Ax = b$ $\quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Soustava má jediné řešení

$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A}$$

kde $A_j = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots \\ a_{21} & & & b_2 & & \\ & & & \vdots & & \\ & & & b_n & & \end{pmatrix}$

Příklad

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 5z &= 0 \\ x + 2y - z &= 4 \\ y + 2z &= -1 \end{aligned}$$

-13-

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{9}{9} = \underline{1}$$