1

PŘÍKLADY ZE CVIČENÍ 07

CV5 V HODINĚ JSME SPOČÍTALI:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & 7 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -5 & 5 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & -1 & 3 \\ 0 & \boxed{-1} & -1 & 1 \end{pmatrix} \circledast$$

PIVOTY JSOU V 1., 2. SLOUPCI $\Rightarrow$ BÁZE M JE $\alpha = (v_1, v_2)$

VYŘEŠENÍM SOUSTAVY $\circledast$ DOSTANEME:

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 + x_4 v_4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s-3t \\ -s+t \\ s \\ t \end{pmatrix}$$ PRO LIBOVOLNÁ $s, t \in \mathbb{R}$

POKUD ZVOLÍME $s=-1, t=0$, DOSTANEME

$$-v_1 + v_2 - v_3 = 0$$

$$\rightsquigarrow \underline{v_3 = -v_1 + v_2}$$

POKUD ZVOLÍME $s=0, t=-1$, DOSTANEME $\underline{\underline{v_4 = 3v_1 - v_2}}$

VLASTNĚ JSME SPOČÍTALI, ŽE $(v_3)_\alpha = (-1,1)^T$,
$(v_4)_\alpha = (3,-1)^T$.

CV6 $1+3x+5x^2+10x^3$

$\alpha = (1+x+2x^2-x^3,\ 1+2x+x^3,\ 1+\dots)$

HLEDÁME (t_1,t_2,t_3,t_4) T.Ž.

$$1+3x+5x^2+10x^3 = t_1(1+x+2x^2-x^3) + t_2(1+2x+x^3) + t_3(\dots) + t_4(\dots)$$

TEDY ŘEŠÍME SOUSTAVU (KOEFICIENTY POLYNOMŮ SE MUSÍ ROVNAT):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & -1 & 5 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 7 & 11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 7 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

TEDY $\underline{\underline{(1+3x+5x^2+10x^3)_\alpha = (-10,2,7,1)^T}}$.

CV7 $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & -8 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 4 & -8 & 1 \end{pmatrix}$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 5 \\ 0 & -7 & 10 & -10 & -9 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} & & \uparrow & \uparrow & \uparrow \end{array} \end{array}$$

SOUSTAVA VE SCHODOVITÉM TVARU MÁ 3 PARAMETRY TEDY DIMENZE U JE 3.

DOŘEŠME:

$$\begin{pmatrix} 7 & 14 & -21 & 7 & 35 \\ 0 & -7 & 10 & -10 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 7 & 0 & -1 & -13 & 17 \\ 0 & -7 & 10 & -10 & -9 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} & & u & s & t \end{array} \end{array}$$

ŘEŠENÍM JE
$$x_1 = \frac{1}{7}(u+13s-17t)$$
$$x_2 = \frac{1}{7}(10u-10s-9t)$$
$$x_3 = u$$
$$x_4 = s$$
$$x_5 = t$$
, KDE $u, s, t \in \mathbb{R}$ LIBOVOLNÁ

BÁZI PROSTORU DOSTANEME POSTUPNÝM DOSAZOVÁNÍM

$u=7,\ s=0,\ t=0 \rightsquigarrow (1,10,7,0,0)$

$u=0,\ s=7,\ t=0 \rightsquigarrow (13,-10,0,7,0)$

$u=0,\ s=0,\ t=7 \rightsquigarrow (-17,-9,0,0,7)$

VOLÍM ZDE SEDMIČKY MÍSTO JEDNIČEK ABYCH SE VYHNUL ZLOMKŮM

$\Rightarrow$ BÁZE JE $((1,10,7,0,0),(13,-10,0,7,0),(-17,-9,0,0,7))$

2 PRŮNIK, SOUČET

DEF) NECHŤ U V.P., $V, W \subseteq U$ VEKT. PODPROSTORY.

- PRŮNIK $V \cap W := \{ u \in U;\ u \in V \wedge u \in W \}$
- SOUČET $V + W := \{ v + w;\ v \in V,\ w \in W \}$

DEF) DIMENZE V.P. V JE POČET PRVKŮ NĚJAKÉ JEHO BÁZE.

VĚTA PRO $V, W \subseteq U$ PODPROSTORY PLATÍ:

$$\dim V + \dim W - \dim (V \cap W) = \dim (V + W)$$

CV8 OZNAČME $P = [u_1, u_2, u_3]$, SPOČÍTEJME $P \cap Q$.
$Q = [v_1, v_2, v_3]$

POKUD $w \in P \cap Q$, EXISTUJÍ ČÍSLA t_i, s_i T.Ž.

$$w = t_1 u_1 + t_2 u_2 + t_3 u_3$$
$$w = s_1 v_1 + s_2 v_2 + s_3 v_3$$

DOHROMADY TEDY:

$$t_1 u_1 + t_2 u_2 + t_3 u_3 = s_1 v_1 + s_2 v_2 + s_3 v_3$$

⇝ VYŘEŠME TO JAKO SOUSTAVU!

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 6 & 3 & 4 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & -2 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & -2 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 6 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & -2 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccccc} & & & x & & y \end{array} \end{array}$$

BÁZI ŘEŠENÍ DOSTANEME DOSAZENÍM:

$t_1 = x = 1$, $t_3 = y = 0$ ⇝ $t_2 = 0$
$t_1 = x = 0$, $t_3 = y = 1$ ⇝ $t_2 = -1$

⇝ BÁZE $P \cap Q$ JE TVOŘENA VEKTORY

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{A} \quad -\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

⇝ DIMENZE $P \cap Q$ JE 2.

KE SPOČTENÍ BÁZE $P + Q$ VEZMĚME VEKTORY Z P, Q A DEJME JE DO SLOUPEČKU A UPRAVUJME

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 6 & 3 & 4 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \text{VIZ VÝŠE} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{-2} & -2 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & 2 \end{array}\right)$$

⇝ BÁZE $P + Q$ JE TVOŘENA (u_1, u_2, u_3, v_2) A MÁ DIMENZI 4. (Z TOHOTO PLYNE $P + Q = \mathbb{R}^4$)

CV9

- PROSTOR P

$P = \{ f \in \mathbb{R}_4[x];\ f(1) = f(2) = 0 \}$
PRVEK P JE POLYNOM:
$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$

POKUD $f(1) = 0$, $f(2) = 0$, DOSTANEME:
$f(0) = a_0 \stackrel{!}{=} 0$
$f(2) = a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 + 16a_4 \stackrel{!}{=} 0$

TO VEDE NA SOUSTAVU:

⇝ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 8 & 16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ DIMENZE 3

⇝ $(0, -2, 1, 0, 0), (0, -4, 0, 1, 0), (0, -8, 0, 0, 1)$ JE BÁZE PROSTORU ŘEŠENÍ

$\Rightarrow \alpha = (-2x + x^2, -4x + x^3, -8x + x^4)$ JE BÁZE P.

- PROSTOR Q:

$Q = \{ g \in \mathbb{R}_4[x];\ g(x) = g(-x) \}$

$g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$
$g(-x) = a_0 - a_1 x + a_2 x^2 - a_3 x^3 + a_4 x^4$

$g(x) = g(-x)$ ⇝ $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 = a_0 - a_1 x + a_2 x^2 - a_3 x^3 + a_4 x^4$

⇝ $2a_1 x + 2a_3 x^3 = 0$ ⇝ $a_1 = a_3 = 0$

OČIVIDNĚ BÁZÍ Q BUDE $\alpha_Q = (1, x^2, x^4)$, $\dim Q = 3$

- PRŮNIK $P \cap Q$:

POKUD $f \in P \cap Q$, PLATÍ: $f(1) = 0$, $f(2) = 0$, $f(x) = f(-x)$
DEJME TYTO PODMÍNKY OPĚT DO SOUSTAVY:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

⇝ $\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4s \\ 0 \\ s \end{pmatrix}$ ⇝ $\alpha_{P \cap Q} = (x^4 - 4x^2)$, $\dim P \cap Q = 1$

Z VĚTY NAHOŘE MÁME
$\dim (P + Q) = 3 + 3 - 1 = 5$
ODTUD $P + Q = \mathbb{R}_4[x]$
BÁZÍ $P + Q$ JE TEDY NAPŘÍKLAD
$(1, x, x^2, x^3, x^4)$

PŘÍKLADY ZE CVIČENÍ 08, LIN ZOBR

CV 1 a) NENÍ, $\varphi(0,0)$ NENÍ DEFINOVÁNO

b) OVĚŘME I) $\varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v)$

II) $\varphi(k \cdot u) = k \cdot \varphi(u)$

PRO $u, v \in \mathbb{R}^3$, $k \in \mathbb{R}$

I) $\varphi((x_1,x_2,x_3)+(y_1,y_2,y_3)) = \varphi((x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3))$

$= (2(x_1+y_1)-(x_2+y_2), 2(x_2+y_2)-(x_3+y_3))$

$\varphi(x_1,x_2,x_3) + \varphi(y_1,y_2,y_3) = (2x_1 - x_2, 2x_2 - x_3)$

$+ (2y_1 - y_2, 2y_2 - y_3)$

$= (2x_1 - x_2 + 2y_1 - y_2, 2x_2 - x_3 + 2y_2 - y_3)$

$= (2x_1 + 2y_1 - x_2 - y_2, 2x_2 + 2y_2 - x_3 - y_3)$

$= (2(x_1+y_1)-(x_2+y_2), 2(x_2+y_2)-(x_3+y_3))$ ✓

II) $\varphi(k \cdot (x_1,x_2,x_3)) = \varphi(kx_1, kx_2, kx_3)$

$= (2kx_1 - kx_2, 2kx_2 - kx_3)$

$k \cdot \varphi(x_1,x_2,x_3) = k(2x_1 - x_2, 2x_2 - x_3)$

$= (2kx_1 - kx_2, 2kx_2 - kx_3)$ ✓

$\Rightarrow \varphi$ JE LINEÁRNÍ.

c) $\varphi: \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(p) = (p(0), p'(0))$

$\varphi(p+q) = ((p+q)(0), (p+q)'(0))$

$= (p(0)+q(0), (p'+q')(0))$

DERIVACE JE LINEÁRNÍ

$= (p(0)+q(0), p'(0)+q'(0))$

$= (p(0), p'(0)) + (q(0), q'(0))$

$= \varphi(p) + \varphi(q)$ ✓

$\varphi(k \cdot p) = ((kp)(0), (kp)'(0))$

$= (k \cdot p(0), k \cdot p'(0))$

$= k \cdot (p(0), p'(0))$

$= k \cdot \varphi(p)$ ✓ $\Rightarrow \varphi$ JE LINEÁRNÍ.

MATICE ZOBRAZENÍ V BAZÍCH

$\boxed{\text{CV 2}}$ PLATÍ $\varphi(u_1) = u_2$

$\varphi(u_2) = u_3$

$\varphi(u_3) = u_1$

V BÁZI $\alpha = (u_1, u_2, u_3)$ TEDY MÁME:

$$\varphi_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

MATICI VE STANDARDNÍ BÁZI DOSTANEME:

$$Id_{\varepsilon,\alpha} = (u_1, u_2, u_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Id_{\alpha,\varepsilon} = Id_{\varepsilon,\alpha}^{-1} = \dots = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

MATICE VE ST. BÁZI JE PAK:

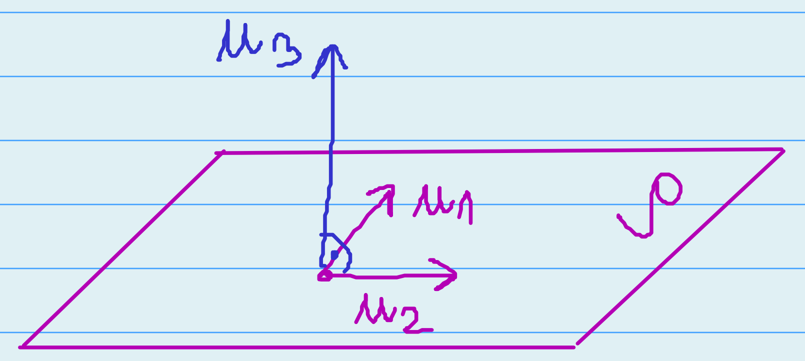
$$\varphi_{\varepsilon\varepsilon} = Id_{\varepsilon\alpha} \cdot \varphi_{\alpha\alpha} \cdot Id_{\alpha\varepsilon} = \dots = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -5 \\ 4 & -3 & -6 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{CV 3}}$ $\rho: x_2 + x_3 = 0 \rightsquigarrow (0\ 1\ 1)$ SOUSTAVA,

ŘEŠENÍM JSOU VEKTORY

$(1,0,0), (0,-1,1)$

$\rightsquigarrow \rho = [\underbrace{(1,0,0)}_{u_1}, \underbrace{(0,-1,1)}_{u_2}]$



← POTŘEBUJEME NAJÍT VEKTOR u_3,

CO BUDE NA u_1, u_2 KOLMÝ,

TJ. $\left.\begin{array}{l} \langle u_3, u_1 \rangle = 0 \\ \langle u_3, u_2 \rangle = 0, \end{array}\right\}$ SKAL. SOUČIN

TJ. PRO $u_3 = (u_3^1, u_3^2, u_3^3)$ MUSÍ BÝT $\bullet\ u_3^1 = 0$

$\bullet\ u_3^2 - u_3^3 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ SOUSTAVA $\rightsquigarrow$ BÁZE ŘEŠENÍ JE $((0,1,1))$

$\rightsquigarrow u_3 = (0,1,1)$

ZE ZADÁNÍ VÍME ŽE $\left.\begin{array}{l} \varphi(u_1) = \cancel{0}\ u_1 \\ \varphi(u_2) = \cancel{0}\ u_2 \\ \varphi(u_3) = -u_3 \end{array}\right\}$ SYMETRIE PODLE ROVINY $\langle u_1, u_2 \rangle$

20.4.23 → OPRAVA:

$\rightsquigarrow$ V BÁZI $\alpha = (u_1, u_2, u_3)$ JE

$$\varphi_{\alpha,\alpha} = \cancel{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

DÁLE $Id_{\varepsilon,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $Id_{\alpha,\varepsilon} = Id_{\varepsilon,\alpha}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\rightsquigarrow \varphi_{\varepsilon,\varepsilon} = Id_{\varepsilon\alpha} \cdot \varphi_{\alpha\alpha} \cdot Id_{\alpha\varepsilon} = \dots = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ZKOUŠKA: NAPŘ. $\varphi(u_3) = -u_3$:

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

5 VLASTNÍ ČÍSLA A VEKTORY

CV4 POČÍTEJME, KDY JE DETERMINANT $\begin{pmatrix}2&1\\3&0\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ ROVEN NULE:

$$\begin{vmatrix}2-\lambda & 1\\ 3 & -\lambda\end{vmatrix} = -\lambda(2-\lambda)-3 = \lambda^2-2\lambda-3$$
$$=(\lambda+1)(\lambda-3)$$
$$\rightsquigarrow \lambda_1=-1,\ \lambda_2=3$$

VLASTNÍ VEKTOR PŘÍSLUŠNÝ ČÍSLU λ_1 DOSTANEME ŘEŠENÍM SOUSTAVY $\left(\begin{pmatrix}2&1\\3&0\end{pmatrix}-(-1)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}2-(-1) & 1\\ 3 & -(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1\\3&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}3&1\end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{VEKTOR } (1,-3)^T$$

VLASTNÍ VEKTOR PŘÍSLUŠNÝ ČÍSLU λ_2:

$$\begin{pmatrix}-1&1\\3&-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1&1\end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{VEKTOR } (1,1)^T$$

CV5 $\begin{vmatrix}-\lambda & -1\\ 1 & -\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+1=0$ NEMÁ V $\mathbb{R}$ ŘEŠENÍ

$\rightsquigarrow$ MATICE NEMÁ VL. ČÍSLA V $\mathbb{R}$.

CV6
$$\begin{vmatrix}2-\lambda & 1 & 0\\ -1 & -\lambda & 3\\ 1 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2-\lambda & -1+\lambda & 0\\ -1 & -\lambda+1 & 3\\ 1 & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}2-\lambda & -1+\lambda & 0\\ 1-\lambda & 0 & 3\\ 1 & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix}=-(-1+\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda & 3\\ 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}$$
$$=(1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2-3\right]=(1-\lambda)\underbrace{(\lambda^2-2\lambda-2)}_{\text{NEMÁ ŘEŠ.}}=0$$

$\rightsquigarrow$ VL. Č. $\lambda=1$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&1&0\\-1&-1&3\\1&1&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{VLASTNÍ VEKTOR } (1,-1,0)$$

CV7
$$\begin{vmatrix}-\lambda & -1 & 2\\ 3 & 4-\lambda & -2\\ 3 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\lambda & -1 & 2\\ 3 & 4-\lambda & -2\\ 0 & -3+\lambda & 3-\lambda\end{vmatrix}=$$
$$\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 2\\ 3 & 2-\lambda & -2\\ 0 & 0 & 3-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)(-\lambda(2-\lambda)-3)=(3-\lambda)(\lambda^2-2\lambda-3)$$
$$=(3-\lambda)(\lambda-3)(\lambda+1)$$

$\rightsquigarrow \lambda_1=3$ ODPOVÍDAJÍ VL. VEKTORY:

$$\begin{pmatrix}-3&-1&2\\3&1&-2\\3&1&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}3&1&-2\end{pmatrix} \rightsquigarrow (-1,3,0),(2,0,3)$$

$\rightsquigarrow \lambda_2=-1$ ODPOVÍDÁ VEKTOR $(1,-1,-1)$.

$\rightsquigarrow$ BÁZE JE $\alpha=((-1,3,0),(2,0,3),(1,-1,-1))$.

CV8
$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & 2 & 1\\ 1 & -2-\lambda & 1 & -4\\ 0 & -1 & -1-\lambda & -1\\ -1 & 0 & -1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & 1+\lambda & 1\\ 1 & -2-\lambda & 0 & -4\\ 0 & -1 & -1-\lambda & -1\\ -1 & 0 & 0 & 2-\lambda\end{vmatrix}=$$
$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & 0 & 0\\ 1 & -2-\lambda & 0 & -4\\ 0 & -1 & -1-\lambda & -1\\ -1 & 0 & 0 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix}-2-\lambda & 0 & -4\\ -1 & -1-\lambda & -1\\ 0 & 0 & 2-\lambda\end{vmatrix}$$
$$=(1-\lambda)(2-\lambda)\begin{vmatrix}-2-\lambda & 0\\ -1 & -1-\lambda\end{vmatrix}$$
$$=(1-\lambda)(2-\lambda)(1+\lambda)(2+\lambda)$$

$\rightsquigarrow$ VL. ČÍSLA $\lambda_{1,\dots,4}$ JSOU $-2,-1,1,2$

VLASTNÍ VEKTOR PŘÍSL. $\lambda_1=-2$:

$$\begin{pmatrix}3&1&2&1\\1&0&1&-4\\0&-1&1&-1\\-1&0&-1&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1&-4\\3&1&2&1\\0&-1&1&-1\\-1&0&-1&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1&-4\\0&1&-1&13\\0&-1&1&-1\end{pmatrix}$$
$$\sim\begin{pmatrix}1&0&1&-4\\0&1&-1&13\\0&0&0&12\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \rightsquigarrow (-1,1,1,0) \text{ VL. VEKTOR.}$$

PODOBNĚ OSTATNÍ.