Jaké jsou poslední dvě cifry čísel: $7^{14}, 3^{59}$?

1) $7^{14} = (7^2)^7 = 49^7 = (50-1)^7 = \sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} 50^{7-k} \cdot (-1)^k$

$= 50^7 - 7 \cdot 50^6 + \binom{7}{2} 50^5 - \binom{7}{3} 50^4 + \binom{7}{4} 50^3 - \binom{7}{5} 50^2$

$+ \binom{7}{6} 50 - 1$

$= 5^7 \cdot 10^7 - 7 \cdot 5^6 \cdot 10^6 + \binom{7}{2} 5^5 \cdot 10^5 - \ldots + 7 \cdot 5 \cdot 10 - 1$

$= 100 \cdot \left(5^7 \cdot 10^5 - 7 \cdot 5^6 \cdot 10^4 + \ldots - \binom{7}{5} 5^2 \right) + 7 \cdot 5 \cdot 10 - 1$

$= 100 \cdot \left(5^7 \cdot 10^5 - \ldots - \binom{7}{5} 5^2 \right) + 349$

$= 100 \cdot \left(5^7 \cdot 10^5 - \ldots - \binom{7}{5} 5^2 + 3 \right) + \underline{49}$

zbytek po dělení stem,
tj. poslední dvě cifry jsou 49.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

$\binom{7}{k} \rightarrow$ 1 7 21 35 35 21 7 1

2) $3^{59} = 3 \cdot 3^{58} = 3 \cdot 9^{29} = 3 \cdot (10-1)^{29}$

$= 3 \cdot \left(10^{29} - \binom{29}{1} 10^{28} + \ldots + \binom{29}{28} \cdot 10 - 1 \right)$

$= 100 \cdot 3 \cdot \left(10^{27} - \binom{29}{1} 10^{26} + \ldots - \binom{29}{27} \cdot 10^0 \right) + 3 \cdot 29 \cdot 10 - 3$

$= 100 \cdot (\ldots) + 870 - 1 = 100 \cdot (\ldots + 8) + \underline{67}$