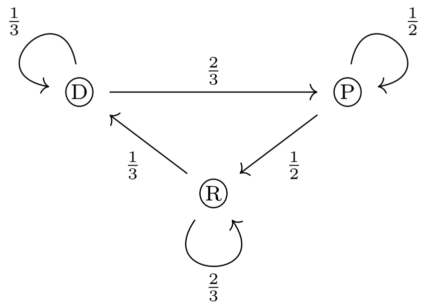
Příklad. Roztržitý profesor s sebou nosí deštník, ale s nějakou pravděpodobností jej zapomene tam, odkud zrovna odchází. Ráno odchází z domova do práce, a protože bývá po ránu v kondici, pravděpodobnost, že deštník zapomene doma je pouze 1/3. Z práce chodí odpoledne do restaurace a pravděpodobnost, že deštník zapomene v práci, je 1/2. V restauraci si dá pozdní oběd a jde domů, přičemž pravděpodobnost, že zapomene deštník v restauraci je rovna 2/3. Uvažujme pro jednoduchost, že nikam jinam po dostatečně dlouhou dobu profesor nechodí a že v restauraci zůstává deštník na profesorově oblíbeném místě, odkud si ho může následující den (pokud nezapomene) vzít.

Napište matici tohoto Markovova procesu. (Je vhodné za časovou jednotku vzít jeden den - od půlnoci do půlnoci.) Jaká je pravděpodobnost, že se po mnoha dnech bude deštník nalézat o půlnoci doma?

Řešení. Následující diagram popisuje, s jakou pravděpodobností profesor přenese deštník o jedno místo dál.



Pan profesor však může přenést deštník o více než jedno místo.

Předpokládejme, že deštník měl dnes doma, jsou 2 možnosti, jak jej může mít večer doma. Buď jej doma ráno zapomene: $\frac{1}{3}$, nebo se mu jej podaří přenést přes práci a restauraci až domů: $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$. Dohromady, pravděpodobnost, že deštník začne i skončí doma je $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$.

Aby např. deštník donesl z domu do práce, nesmí jej zapomenout doma a musí jej zapomenout v práce, tedy pravděpodobnost je $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$. Dále si uvědomme, že pokud byl deštník ráno v restauraci, nemůže skončit večer v práci.

V matice Markovova procesu nám sloupce označují, kde deštník začal, a řádky, kde skončí.

$$\begin{array}{c} \\ D \\ P \\ R \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} D & P & R \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Jak bude vypadat rozložení pravděpodobností po mnoha dnech zjistíme nalezením vlastního vektoru k vlastnímu číslu 1. (Vysvětlení pod čarou[1].)

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{9} - 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} - 1 & 0 \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} - 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & -1 \\ -\frac{5}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to (3, 2, 4)$$

[1]Označíme-li si M spočítanou matici a $\mathbf{x}$ vektor pravděpodobností, kde se deštník nachází ráno, pak $M \cdot \mathbf{x}$ nám značí, kde bude s jakou pravděpodobností deštník večer. Protože nás zajímá stav po mnoha dnech, zajímá nás, na jakých hodnotách se bude vektor ustalovat po opakovaném násobení maticí M. Hledaný vektor $\mathbf{x_0}$ je takový, který se nám již násobení maticí M nezmění, tedy $M\mathbf{x_0} = \mathbf{x_0}$, tedy $\mathbf{x_0}$ je vlastním vektorem k vlastnímu číslu 1. To, že matice má vskutku vl. číslo 1 plyne z toho, že je matice primitivní (matice M má pro dostatečně velkou mocninu M^n všude nenulové kladné prvky) a že je to matice stochastická (v každém sloupci máme součet prvků roven 1).

Našli jsme nějaký vlastní vektor, upravíme jej, abychom dostali vektor pravděpodobností

$$\tfrac{1}{3+2+4}(3,2,4) = (\tfrac{3}{9}, \tfrac{2}{9}, \tfrac{4}{9}),$$

Tedy pravděpodobnost, že deštník bude po mnoha dnech doma je $\frac{3}{9}$. $\triangle$