$x_1(t)$ … počet ovcí < 1 rok

$x_2(t)$ … 1–2 roky

$x_3(t)$ … 2–3

$x_4(t)$ … 3–4

$$x_1(t+1) = 2\cdot x_2(t) + 4\cdot x_3(t) + 2\cdot x_4(t)$$
$$x_2(t+1) = \left(\tfrac{1}{2} - p\right) x_1(t)$$
prodané ovce
$$x_3(t+1) = \tfrac{1}{2}\, x_2(t)$$
$$x_4(t+1) = \tfrac{1}{2}\, x_3(t)$$

$$\begin{pmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \\ x_3(t+1) \\ x_4(t+1) \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}}^{A} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix}$$

Leslieho matice

$$\tfrac{1}{2} - p = a$$

$$p = \frac{1}{2} - a = \frac{1}{2} - \frac{2}{9} = \frac{9-4}{18} = \frac{5}{18}$$ ← mohl prodat jehňat

$$Ax = \lambda x$$

Populace se stabilizuje, když A má vl. č. $\lambda = 1$:

$$0 = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 4 & 2 \\ a & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -\lambda \end{vmatrix} \overset{\lambda=1}{=\!=} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 & 2 \\ a & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\cdot(-1)\cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1 \end{vmatrix}$$
$$+ (-1)^{2+1}\cdot a \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1/2 & -1 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$0 = 1 - a\cdot\left(2 + \tfrac{1}{2} - (-2)\right) = 1 - \tfrac{9}{2}a$$

$$\Rightarrow a = \tfrac{2}{9}$$

V jakém poměru se stabilizuje?

→ Spočítáme vl. vektor pro $\lambda = 1$.

zřejmě lin. závislý →
$$\begin{pmatrix} \cancel{-1} & \cancel{2} & \cancel{4} & \cancel{2} \\ 2/9 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{Řešení: } (18, 4, 2, 1)$$

$$\tfrac{2}{9} x_1 - 4 = 0$$
$$x_1 = 18 \quad \Rightarrow \text{ v poměru } \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 18 & : 4 & : 2 & : 1 \end{matrix}$$

Př. $p(t)$... počet rybích plůdků

$m(t)$... počet malých ryb

$v(t)$... počet velkých ryb

$$p(t+1) = 3\cdot m(t) + 3\cdot v(t)$$
$$m(t+1) = 0{,}2\cdot p(t)$$
$$v(t+1) = 0{,}6\cdot m(t) + \tau\cdot v(t)$$

τ kolik v.r. přežije

1 štika sní 500 velkých ryb.

$$\underset{\text{počet štik}}{500\cdot x} = \underbrace{(1-\tau)}_{\text{kolik bude sežráno}}\cdot v(t)$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0{,}2 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & \tau \end{pmatrix}$$

Stabilní populace $\Rightarrow$ vl. číslo $\lambda = 1$

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 0{,}2 & -1 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & \tau-1 \end{vmatrix} = \tau - 1 + 0{,}36 - 0{,}6(\tau-1) = 0{,}4\tau - 0{,}04 = 0 \Rightarrow \underline{\tau = 0{,}1}$$

$$\frac{v(t)}{x} = \frac{500}{1-0{,}1} = \frac{500}{0{,}9} \doteq 556$$

velkých ryb

Aby se pop. ryb stabilizovala musíme na každých 556 v.r. nasadit 1 štiku.

$$A^2 = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^4 = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix}$$

$*$... kladný prvek

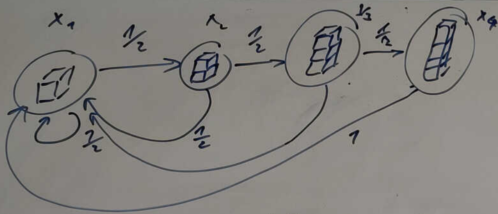
A^4... všechny prvky kladné

$\Rightarrow A$ je primitivní

$\Rightarrow A$ má vl. č. 1

a stabilizuje se na vl. vektoru pro $\lambda = 1$

Př.



Markovův proces

$x_i(t)$... pravděpodobnost AE věž o vel. i

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix}$$

$t = 1, 2, 3, 4 \ldots$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/4 \\ 1/8 \\ 1/8 \end{pmatrix}$$

Dokážeme, že to má vl. č. 1 ← nemusíme, platí ~~vždy~~ pro každou stochastickou (součet ve sloupcích = 1), primitivní (nějaká mocnina matice má všechny prvky kladné nenul.) matici.

$$\begin{vmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) = 0$$

Hledáme vlastní vektor k $\lambda = 1$

je lin. závislý →
$$\begin{pmatrix} \cancel{-1/2} & \cancel{1/2} & \cancel{1/2} & \cancel{1} \\ 1/2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1 \end{pmatrix}$$

řešení jsou gen. $(8, 4, 2, 1)$

Pravděp., že maminka uvidí věž o 1, 2, 3, 4 kostkách je postupně $\frac{8}{15}, \frac{4}{15}, \frac{2}{15}, \frac{1}{15}$

Př. EE, EV, VE, VV

loni byli u babičky

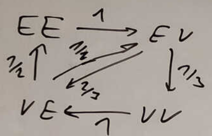
předloni cestovali p. EU

$$EE(t+1) = 0 \cdot EE(t) + \tfrac{1}{2} \cdot VE(t)$$

$$EV(t+1) = 1 \cdot EE(t) + \tfrac{1}{2} \cdot VE(t)$$

$$VE(t+1) = \tfrac{2}{3} EV(t) + 1 \cdot VV(t)$$

$$VV(t+1) = \tfrac{1}{3} EV + 0 \cdot VV(t)$$



$$\begin{array}{c|cccc} & EE & EV & VE & VV \\ \hline EE & & & & \\ EV & & & & \\ VE & & & & \\ VV & & & & \end{array} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Stabilizuje pro $\lambda = 1$ (je primitivní):

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & -1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 2/3 & -1 & 1 \\ 0 & 1/3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & -1 & 1 \\ 0 & 1/3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1/3} & \cancel{-1} \end{pmatrix} \rightarrow (3, 6, 6, 2)$$

lin. závislé

$$\Rightarrow \text{pravděpodobnosti: } \begin{array}{cccc} EE & EV & VE & VV \\ \end{array} \left(\frac{3}{17}, \frac{6}{17}, \frac{6}{17}, \frac{2}{17} \right)$$

$\Rightarrow$ Pravděpodobnost, že jsou letos na Vysočině je $\frac{6}{17} + \frac{2}{17} = \frac{8}{17}$

Zadání:

Rodina jezdí ročně na dovolenou.
Jedou buď po Evropě – E, nebo jedou za babičkou na Vysočinu – V.
Rozhodují se podle toho, kde byli loni a předloni a také podle náhody, viz diagram a matice.
Např. když minulý rok jezdili po Evropě a předminulý rok byli na Vysočině – označíme VE, pak s pravděp. $\frac{1}{2}$ pojedou letos do V a s pravděp. $\frac{1}{2}$ do E.

Jaká je pravděp., že budou letos na V?

Př.

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 2 \\ 1/2 & -\lambda & 0 \\ 0 & a & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + a + \frac{1}{2}\lambda = 0$$

λ vl. číslo L:

① $0 < \lambda < 1 \rightarrow$ populace vymírá

② $\lambda = 1 \rightarrow$ popu. stabilní

③ $\lambda > 1 \rightarrow$ pop. expandují

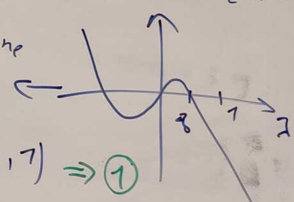
$\lambda = 1 \rightarrow -1^3 + a + \frac{1}{2}\cdot 1 = 0$

$a = \frac{1}{2} \Rightarrow$ ②

$(a = 0)$, $(\lambda - \sqrt{\tfrac{1}{2}})(\lambda + \sqrt{\tfrac{1}{2}})$

$-\lambda^3 + \frac{1}{2}\lambda + a \leftarrow$ posunutý graf $-\lambda^3 + \frac{1}{2}\lambda = -\lambda\cdot(\lambda^2 - \frac{1}{2})$

zvětšení a posune graf nahoru



$\Rightarrow a \in (0, \frac{1}{2}) \Rightarrow \lambda_0 \in (\frac{1}{\sqrt{2}}, 1) \Rightarrow$ ①

$\Rightarrow a > \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda > 1 \Rightarrow$ ③