



Faculty of Informatics
Masaryk University Brno

Cvičení k předmětu IB005 Formální jazyky a automaty

poslední modifikace 15. dubna 2021

Tato sbírka byla vytvořena z příkladů ke cvičení z předmětu *Formální jazyky a automaty I*, které byly původně připraveny Ivanou Černou. Na opravě chyb a doplnění příkladů se podíleli Jiří Barnat, Vojtěch Řehák, Jan Strejček a mnoho dalších studentů a cvičících.

Formální jazyky, regulární gramatiky

1.1 Jsou dány jazyky L_1, L_2 nad abecedou $\{x, y, z\}$, kde $L_1 = \{xy, y, yx\}$, $L_2 = \{y, z\}$. Vypočítejte:

- $L_1 \cup L_2$
- $L_1 \cap L_2$
- $L_1 \cdot L_2, L_2 \cdot L_1$
- $L_2^0, L_2^1, L_2^2, L_2^3, L_2^*, L_2^+$
- $co - L_2$

1.2 Vypočítejte:

- $\emptyset^*, \emptyset^+, \{\varepsilon\}^*, \{\varepsilon\}^+$
- $\emptyset \cup \{\varepsilon\}, \emptyset \cap \{\varepsilon\}, \emptyset \cap L, \{\varepsilon\} \cap L$
- $\emptyset \cdot \{\varepsilon\}, \emptyset \cdot L, \{\varepsilon\} \cdot \{\varepsilon\}, \{\varepsilon\} \cdot L$

1.3 Jsou dané jazyky $L_1, L_2 \subseteq \{a, b, c, d\}^*$, kde $L_1 = \{a, aa, ba\}$, $L_2 = \{ba, abc, a, \varepsilon\}$.

- Vypočítejte $L_1 \cup L_2$.
- Vypočítejte $L_1 \cap L_2$.
- Vypočítejte $L_1 \cdot L_2$.
- Rozhodněte, zda platí $L_1 \cdot L_2 = L_2 \cdot L_1$.
- Najděte slovo $w \in L_1 \cdot L_2 \cap L_2 \cdot L_1$.
- Rozhodněte, zda platí $L_1 \subseteq L_1 \cdot L_2$. Pokud ano, platí tvrzení pro libovolnou dvojici jazyků L_1, L_2 ? Pro pokročilý: platí $\varepsilon \in L_2 \iff L_1 \subseteq L_1 \cdot L_2$?
- Rozhodněte, zda platí
 - $aabaabc \in L_2^4$
 - $baaabc \in L_2^6$
 - $ababc \in L_2^3$
- Popište $co - L_2$ (komplement jazyka L_2).

1.4 Buď L libovolný jazyk, rozhodněte zda platí:

- pro $\forall i \in \mathbb{N}$ platí $L^i = \{w^i \mid w \in L\}$
- pro $\forall i \in \mathbb{N}$ platí $w \in L^i \Rightarrow |w| = i$
- najděte jazyk, pro který oba výše uvedené vztahy platí

1.5 Porovnejte (slovně popište) jazyky a rozhodněte zda $L_1 = L_4$

- $L_1 = \{x, y, z\}^*$
- $L_2 = \{xyz\}^*$
- $L_3 = \{x\}^* \cdot \{y\}^* \cdot \{z\}^*$
- $L_4 = (\{x\}^* \cdot \{y\}^* \cdot \{z\}^*)^*$
- $L_5 = (\{x, y\}^* \cup \{z\}^*)^*$

- $L_6 = \{x, y, z\}^* \cdot \{x\} \cdot \{x, y, z\}^*$

1.6 Porovnejte (slovně popište) jazyky a rozhodněte zda $L_1 = L_3$

- $L_1 = \{x, y, z\}^*$
- $L_2 = \{x, y, z\}^+$
- $L_3 = \{x\}^* \cdot \{y\}^* \cdot \{z\}^*$
- $L_4 = \{x\}^* \cdot \{y\}^2 \cdot \{z\}^*$
- $L_5 = (\{x\}^* \cdot \{y\}^* \cdot \{z\}^*)^*$
- $L_6 = \{x, y, z\}^* \cdot \{x\} \cdot \{x, y, z\}^*$

1.7 Pomocí jazyků $L_1 = \{a\}$, $L_2 = \{b\}$ nad abecedou $\{a, b\}$ a množinových operací sjednocení (\cup), průniku (\cap), konkatenace (\cdot), iterace (* , $^+$) a doplňku ($co-$) vyjádřete jazyk, obsahující všechna slova, která

- obsahují alespoň 2 znaky a
- mají sudou délku
- začínají znakem a a končí znakem b
- začínají a končí stejným znakem
- obsahují podslovo aba
- splňují b) a c)
- nesplňují b)

1.8 Pro libovolné jazyky L_1 , L_2 , L_3 dokažte, zda platí, nebo neplatí:

- $L_1 \subset L_1 \cdot L_2$
- $(L_1 \cup L_2) \cdot L_3 = (L_1 \cdot L_3) \cup (L_2 \cdot L_3)$
- $(L_1 \cap L_2) \cdot L_3 = (L_1 \cdot L_3) \cap (L_2 \cdot L_3)$
- pro $\forall i \in \mathbb{N}$ platí $L_1^i \cdot L_2^i = (L_1 \cdot L_2)^i$
- $L_1^* \cup L_2^* = (L_1 \cup L_2)^*$
- $L_1^* \cdot L_1^* = L_1^*$
- $(L_1 \cup L_2)^* = (L_1^* \cdot L_2 \cdot (L_1)^*)^*$

1.9 Jaký jazyk generuje gramatika G a jakého je typu?

- $G = (\{S, A, B, C\}, \{a, b, c, d\}, P, S)$, kde

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow aSb \mid cAd, \\ cA \rightarrow aB \mid Ca, \\ Bd \rightarrow Sb \mid A, \\ Cad \rightarrow ab \mid \varepsilon \end{array} \right\}$$
- $G = (\{S, A\}, \{b, c, a\}, P, S)$, kde

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow bS \mid cS \mid aA, \\ A \rightarrow aA \mid bA \mid cA \mid a \mid b \mid c \end{array} \right\}$$

1.10 Jaký jazyk generuje následující gramatika? Diskutujte vhodné označení neterminálů ($S_{00}, S_{01}, S_{10}, S_{11}$).

$$G = (\{S, A, B, C\}, \{a, b\}, P, S), \text{ kde}$$

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow aA \mid bB \mid \varepsilon, \\ A \rightarrow aS \mid bC, \\ B \rightarrow aC \mid bS, \\ C \rightarrow aB \mid bA \end{array} \right\}$$

1.11 Navrhněte regulární gramatiky pro následující jazyky:

- $L = \{a, b, c, d\}^*$

- b) $L = \{a, b, c, d\}^i \{a, b, c, d\}^*$; $i = 2, 10, 100$
- c) $L = \{w \mid w \in \{a, b\}^*, |w| \geq 3\}$
- d) $L = \{w \mid w \in \{a, b\}^*, |w| = 3k, k \geq 0\}$
- e) $L = \{w \mid w \in \{a, b, c\}^*, w \text{ obsahuje podslovo } abb\}$
- f) $L = \{w \cdot w^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$
- g) $L = \{w \mid w \in \{a, b, c\}^*, \text{ první 3 znaky } w = \text{ poslední 3 znaky } w\}$
- h) $L = \{w \mid w \in \{a, b, c\}^*, w \text{ neobsahuje podslovo } abb\}$
- i) $L = \{w \mid w \in \{a, b, c\}^*, \#_a(w) = 2k, \#_b(w) = 3l + 1, k, l \geq 0\}$
- j) $L = \{w \mid w \in \{0, 1, \dots, 9\}^*, w \text{ je zápis přir. čísla dělitelného 5}\}$
- k) $L = \{w \mid w \in \{0, 1, \dots, 9\}^*, w \text{ je zápis přir. čísla dělitelného 3}\}$
- l) $L = \{w \mid w \in \{0, 1, \dots, 9\}^*, w \text{ je zápis přir. čísla dělitelného 25}\}$

Deterministické konečné automaty, pumping lemma

2.1 Je dán následující konečný automat: $A = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b\}, \delta, q_0, \{q_3\})$

$$\begin{array}{ll} \delta(q_0, a) = q_1 & \delta(q_0, b) = q_2 \\ \delta(q_1, a) = q_3 & \delta(q_1, b) = q_1 \\ \delta(q_2, a) = q_2 & \delta(q_2, b) = q_2 \\ \delta(q_3, a) = q_1 & \delta(q_3, b) = q_2 \end{array}$$

- Uveďte jinou formu zápisu automatu.
- Popište jazyk akceptovaný konečným automatem A .
- Diskutujte variantu konečného automatu, kde $F = \{q_3, q_2\}$; $\delta(q_3, a) = q_0$

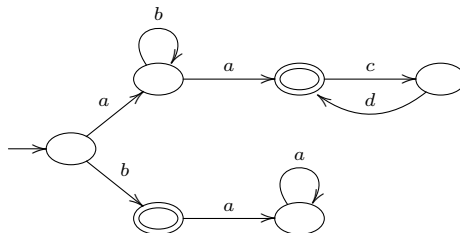
2.2 Konstruuje **deterministické** FA, které rozpoznávají následující množiny

- $\{a, b, c\}^5 \cdot \{a, b, c\}^*$
- $\{w \mid w \in \{a\}^*; |w| = 2k \text{ nebo } |w| = 7l; k, l \geq 0\}$
- $\{w \mid w \in \{a, b\}^*; \#_a(w) = 3k; k \geq 0\}$
- $\{w \mid w \in \{a, b\}^*; w \text{ obsahuje podslovo } abbab\}$
- $\{w \mid w \in \{a, b\}^*; w \text{ obsahuje podslovo } ababb\}$
- $\{w \mid w \in \{a, b\}^*; w \text{ neobsahuje podslovo } abbab\}$
- $\{a, b\}^* \cdot (\{c, d\} \cup (\{d\} \cdot \{a, b\}^* \cdot \{c\})) \cdot \{a, b\}^+$
- $(\{a\} \cup \{b\} \cdot \{a\} \cdot \{b\}^* \cdot \{a\} \cdot \{b\})^*$

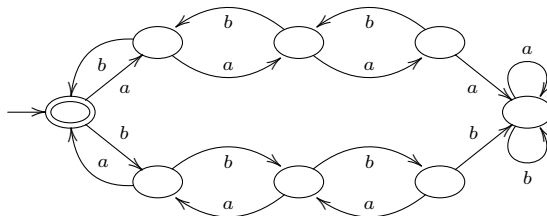
2.3 Konstruuje **deterministické** FA pro následující jazyk nad abecedou $\{a, b, c, d\}$

- $L = \{a, b\}^* \cdot \{c\} \cdot \{aa, b\}^* \cdot \{d\}^+$
- $L = \{w \mid w \in \{a, b, c\}^*, w \text{ neobsahuje podslovo } babb\}$
- $L = \{a, b\}^* \cdot (\{cd\}^+ \cdot \{d\} \cdot \{a, b\}^* \cdot \{c\}) \cdot \{a, b\}^+$

2.4 Pomocí množin $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}$ a množinových operací sjednocení (\cup), průniku (\cap), konkatenace (\cdot), iterace ($^*, ^+$) a doplňku ($co-$) vyjádřete jazyk akceptovaný automatem:



2.5 Co akceptuje následující automat? ($\#_a(w) = \#_b(w)$ je špatná odpověď)



2.6 Pomocí věty o vkládání dokažte, že jazyk L není regulární:

- a) $L = \{a^i b^j \mid j > i \geq 1\}$
- b) $L = \{w \mid w \in \{a, b\}^*; \#_a(w) = \#_b(w)\}$
- c) $L = \{w \cdot w^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$
- d) $L = \{a^n \mid n = 2^i; i \geq 0\}$
- e) $L = \{a^i b^j \mid i \neq j; i, j \geq 0\}$
- f) $L = \{a^n b^{(n!)^2} \mid n \geq 0\}$
- g) $L = \{c^i a^j b^k \mid j \leq k; i, j, k \in \mathbb{N}\}$

2.7 O každém z následujících jazyků nad abecedou $\Sigma = \{a, b, c\}$ rozhodněte, zda je regulární, a vaše tvrzení dokažte.

- a) $\{uv \mid u, v \in \{a, b\}^*, |u| < |v|\}$
- b) $\{ucv \mid u, v \in \{a, b\}^*, |u| < |v|\}$

2.8 Pro pokročilé: Zkonstruuje konečný automat A rozpoznávající jazyk $L = \{a\}^* \cdot \{b\}$. Dokažte, že automat rozpoznává zadaný jazyk, tedy že $L(A) = L$.

2.9 Konstruuje deterministické FA pro všechny regulární jazyky příkladu 1.11.

Minimalizace DFA, nedeterministické FA, (Myhillova-)Nerodova věta

3.1 Pro následující konečné automaty zadané tabulkou:

- ověřte, že všechny stavy jsou dosažitelné
- zkonstruujte minimální automat
- minimální automat zapište v kanonickém tvaru

a)

	<i>a</i>	<i>b</i>
→ 1	2	3
2	5	2
3	3	5
← 4	12	2
← 5	7	8
6	4	9
7	12	11
8	4	6
9	10	8
← 10	3	2
← 11	12	6
12	3	10

b)

	<i>a</i>	<i>b</i>
↔ 1	3	2
2	6	4
3	3	5
← 4	4	2
5	10	8
6	6	7
← 7	7	5
← 8	8	2
← 9	11	2
10	10	9
← 11	11	5

3.2 Odstraňte nedosažitelné stavy z DFA zadaného tabulkou vlevo a minimalizujte ho a převed'te do kanonického tvaru. Poté ověřte, zda je výsledný automat ekvivalentní s automatem zadaným tabulkou vpravo.

a)

	<i>a</i>	<i>b</i>
→ 1	5	2
2	2	8
3	2	7
← 4	9	4
5	2	1
6	2	5
← 7	8	6
8	2	4
9	8	9

	<i>a</i>	<i>b</i>
→ 1	4	2
2	2	5
3	3	6
4	4	2
← 5	5	3
← 6	6	2

b)

	<i>a</i>	<i>b</i>
1	3	1
→ 2	9	4
3	–	1
← 4	9	4
5	8	5
6	5	4
← 7	6	9
8	11	–
9	7	9
10	12	3
11	8	1
12	–	10

	<i>a</i>	<i>b</i>
1	2	1
← 2	3	1
3	4	5
4	4	4
→ 5	1	5

3.3 Ověřte, zda DFA z příkladu 3.1 a) je ekvivalentní s následujícím DFA zadaným tabulkou

	<i>a</i>	<i>b</i>
1	1	3
→ 2	4	1
← 3	4	1
4	3	4

3.4 Navrhněte nedeterministické konečné automaty pro následující jazyky:

- $L = \{w \in \{a, b, c, d\}^* \mid w \text{ obsahuje podslovo } abbc \text{ nebo } bba \text{ nebo } aba\}$
- $L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid w \text{ obsahuje podslovo } abbc \text{ nebo } acbca \text{ nebo } bcabb\}$
- $L = \{w \in \{a, b, c, d\}^* \mid w \text{ končí řetězcem } aaaa\}$
- $L = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ má čtvrtý symbol od konce } 1\}$
- $L = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ končí řetězcem } 01011\}$
- $L = ((\{0\}^* \cdot \{1\}) \cup (\{0\}^+ \cdot \{1\}^* \cdot \{0\})^*)^*$
- $L = ((\{0\} \cdot \{0\} \cdot \{0\}^*) \cup (\{1\} \cdot \{1\} \cdot \{1\}^*))^*$

3.5 K daným nedeterministickým FA zkonstruujte deterministické FA.

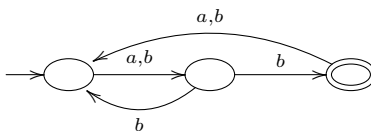
a)

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
→ 1	{2,3}	{3,4}	{1}
← 2	{3}	{4}	{2}
3	{1,2,3}	{1}	{3,4}
4	{1}	{1}	{3,4}

b)

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
→ 1	{1,2}	{1}	∅
← 2	∅	{3}	{1}
3	∅	∅	{1,4}
4	{5}	∅	∅
5	∅	{6}	∅
6	{7}	∅	∅
← 7	∅	∅	∅

3.6 Popište jazyk akceptovaný automatem:



3.7 Kolik různých jazyků rozhodují automaty s jedním nebo se dvěma stavy nad abecedou $\{x\}$ nebo $\{x, y\}$?

3.8 Dokažte, že neexistuje (totální deterministický) automat se 4 stavy, který akceptuje jazyk:

- $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w| \geq 4\}$

b) $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w| = 5k, k \in \mathbb{N}_0\}$

3.9 Najděte a formálně popište alespoň dvě relace $\sim \subseteq \{a, b\}^* \times \{a, b\}^*$ splňující podmínky Nerodovy věty pro jazyk

$$L = \{w \mid w \in \{a, b\}^*, w \text{ obsahuje podslovo } abb\}.$$

Určete indexy těchto relací.

3.10 Pomocí Nerodovy věty a posléze pomocí Myhillovy-Nerodovy věty dokažte, že není regulární:

a) $L = \{a^n \mid n = 2^i, i \geq 0\}$

b) $L = \{a^n b^m \mid n \leq m \leq 2n, n, m > 0\}$

c) $L = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^+\}$

d) $L = \{a^i b^j \mid i \neq j; i, j \geq 0\}$

3.11 Pomocí MN věty dokažte, že je regulární:

- $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = 3k, k \geq 0\}$

3.12 Každý jazyk jednoznačně určuje relaci \sim_L předpisem $u \sim_L v$ právě když pro každé w platí $uw \in L \Leftrightarrow vw \in L$. Určete index této relace pro jazyky:

a) $L = \{a\}^* \cdot \{b\}^* \cdot \{c\}^*$

b) $L = \{a^n b^n c^n \mid n > 0\}$

3.13 Necht' $\Sigma = \{a, b\}$. Uvažte následující relace na množině Σ^* :

a) $u \sim v \iff \#_a(u) \bmod 4 = \#_a(v) \bmod 4$

b) $u \sim v \iff \#_a(u) \bmod 4 = \#_a(v) \bmod 4$ nebo u i v končí na stejné písmeno

c) $u \sim v \iff \#_a(u) \bmod 4 = \#_a(v) \bmod 4$ a u i v končí na stejné písmeno

(Prázdné slovo končí na stejné písmeno jako prázdné slovo, ale žádné neprázdné slovo na stejné písmeno nekončí.) U každé relace určete, zda je to ekvivalence. Pokud ano, určete její index a zda je pravou kongruencí. Pokud ano, nalezněte jazyk L takový, že $\sim_L = \sim$. Nakonec nalezněte jazyk L' , který je sjednocením některých tříd rozkladu Σ^* / \sim , ale přitom $\sim_{L'} \neq \sim$.

Regulární gramatiky a výrazy \Leftrightarrow FA, ε -kroky, Kleeneho věta

4.1 Zkonstruujte ekvivalentní konečný automat k následující gramatice:

$$G = (\{S, A, C, B\}, \{a, b, c\}, P, S), \text{ kde}$$

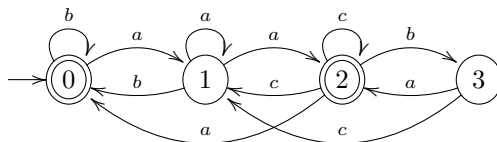
$$P = \{ S \rightarrow aA \mid bC \mid a \mid \varepsilon, \\ A \rightarrow bB \mid aA \mid b \mid c, \\ B \rightarrow aB \mid bC \mid aC \mid cA \mid c, \\ C \rightarrow a \mid b \mid aA \mid bB \}$$

4.2 Zkonstruujte ekvivalentní konečný automat k následující gramatice:

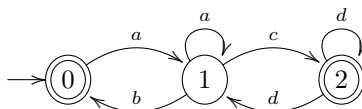
$$G = (\{S, X, Y, Z\}, \{a, b, c\}, P, S), \text{ kde}$$

$$P = \{ S \rightarrow aX \mid bY \mid c, \\ X \rightarrow bX \mid bS, \\ Y \rightarrow bS \mid cZ, \\ Z \rightarrow aS \mid b \mid c \}$$

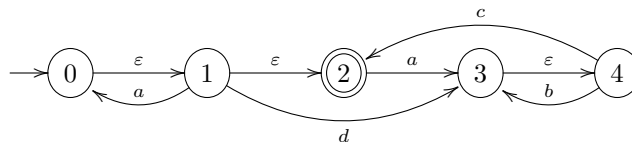
4.3 Zkonstruujte ekvivalentní regulární gramatiku k automatu:



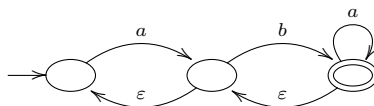
4.4 Zkonstruujte ekvivalentní regulární gramatiku k automatu:



4.5 K danému automatu s ε -kroky zkonstruujte ekvivalentní automat bez ε -kroků.



4.6 K danému automatu s ε -kroky zkonstruujte ekvivalentní automat bez ε -kroků.



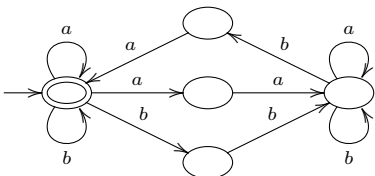
4.7 K danému automatu s ε -kroky zkonstruujte ekvivalentní automat bez ε -kroků.

	a	b	c	ε
$\rightarrow 1$	$\{1,2\}$	\emptyset	\emptyset	$\{2\}$
2	$\{5\}$	$\{3,5\}$	\emptyset	\emptyset
3	\emptyset	$\{6\}$	\emptyset	\emptyset
4	\emptyset	$\{4\}$	\emptyset	$\{1,5\}$
5	$\{5\}$	\emptyset	$\{3\}$	$\{6\}$
$\leftarrow 6$	\emptyset	\emptyset	$\{3,6\}$	$\{2\}$

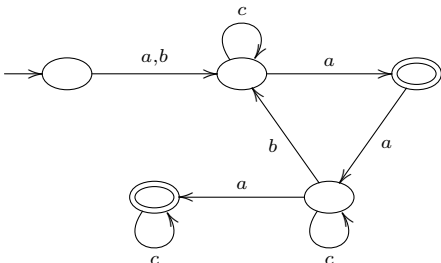
4.8 K danému regulárnímu výrazu zkonstruujte ekvivalentní FA

- $(ab)^*(aa + bb)(a + ab)^*$
- $((a + b(a + c))^* + (b + c))^*$
- $((a + b)^* + c)^* + d)^*$

4.9 K danému FA zkonstruujte ekvivalentní regulární výraz



4.10 K danému FA zkonstruujte ekvivalentní regulární výraz



4.11 Pomocí regulárních výrazů popište násl. jazyky:

- $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ končí na } ab\}$
- $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = 2k, k \geq 0\}$
- $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ začíná a končí stejným symbolem } \}$
- $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w| = 2k, k \geq 0\}$

4.12 Ukažte, jaký je vztah mezi třídou regulárních jazyků \mathcal{R} a nejmenší třídou

- M_1 , která obsahuje všechny konečné jazyky a je uzavřená vzhledem k sjednocení, zřetězení a průniku (\cup, \cdot, \cap).
- M_2 , která obsahuje všechny konečné jazyky a je uzavřená vzhledem k sjednocení, průniku a komplementu ($\cup, \cap, co-$).
- M_3 , která obsahuje všechny konečné jazyky a je uzavřená vzhledem k sjednocení, průniku a mocnině ($\cup, \cap, ^n$).

Uzávěrové vlastnosti \mathcal{R}

5.1 Rozhodněte, zda platí: jsou-li jazyky L_1, L_2, L_3, \dots regulární, pak i jazyk

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} L_i$$

je regulární jazyk.

5.2 Najděte takovou posloupnost regulárních jazyků L_1, L_2, L_3, \dots aby jazyk

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} L_i$$

nebyl regulární.

5.3 Nechtě L_1, L_2 jsou neregulární jazyky nad abecedou $\{a, b\}$. Dokažte nebo vyvráťte, zda je či není regulární:

- a) $L_1 \cap L_2$
- b) $L_1 \cup L_2$
- c) $L_1 \setminus L_2$
- d) $L_1 \cdot L_2$
- e) L_1^*
- f) $co-L_1$

5.4 Nechtě L_1 je regulární a $L_1 \cap L_2$ je neregulární jazyk. Platí, že jazyk L_2 je nutně neregulární?

5.5 Platí následující implikace?

- a) L_1 je regulární, L_2 je neregulární $\Rightarrow L_1 \cap L_2$ je neregulární
- b) L_1 je regulární, L_2 je neregulární $\Rightarrow L_1 \cap L_2$ je regulární
- c) L_1 je regulární, L_2 je neregulární $\Rightarrow L_1 \setminus L_2$ je neregulární
- d) L_1 je regulární, L_2 je neregulární $\Rightarrow L_1 \setminus L_2$ je regulární
- e) L_1 je regulární, L_2 je neregulární $\Rightarrow L_2 \setminus L_1$ je neregulární
- f) L_1 je regulární, L_2 je neregulární $\Rightarrow L_2 \setminus L_1$ je regulární

5.6 Def: operace \odot rozšířeného sjednocení dvou jazyků takto:

$$L_1 \odot L_2 = \{u \cdot v \mid u, v \in (L_1 \cup L_2)\}$$

Dokažte, že jestliže jsou jazyky L_1 a L_2 regulární, pak i jazyk $L_1 \odot L_2$ je regulární. Dále najděte dva takové neregulární jazyky L_1 a L_2 , aby jazyk $L_1 \odot L_2$ byl regulární.

5.7 Nechtě $L \subseteq \Sigma^*$ je regulární jazyk. Dokažte, že jazyky $L^\#$ jsou regulární:

- a) $L^\# = \{v \mid \text{existuje } u \in \Sigma^* \text{ takové, že } u \cdot v \in L\}$
- b) $L^\# = \{w \mid \text{existují } x, y, z \in \Sigma^* \text{ takové, že } y \in L \text{ a } w = xyz\}$

5.8 Dokažte, že pro libovolný jazyk L a libovolný konečný jazyk K platí:

- a) L je regulární $\iff L \setminus K$ je regulární
- b) L je regulární $\iff L \cup K$ je regulární

5.9 Def: Homomorfismus $h : \Sigma^* \rightarrow \Delta^*$ je daný předpisem:

$$\begin{aligned} h(\varepsilon) &= \varepsilon \\ h(u.v) &= h(u).h(v) \text{ pro všechny } u, v \in \Sigma^* \end{aligned}$$

Def: Necht L je jazyk, pak $h(L) = \{w \mid w = h(u), \text{ kde } u \in L\}$

Def: Inverzní Homomorfismus:

$$\begin{aligned} h^{-1}(y) &= \{x \in \Sigma^* \mid h(x) = y\} \\ h^{-1}(L) &= \{x \in \Sigma^* \mid h(x) \in L\} \end{aligned}$$

Příklad

$$\begin{aligned} h(a) &= 01 \\ h(b) &= 011, \text{ pak} \end{aligned}$$

- $h(abb) = 01011011$
- $h^{-1}(0101011) = \{aab\}$
- $h^{-1}(0010) = \emptyset$
- pokud navíc $h(c) = \varepsilon$ pak $h^{-1}(01011) = L(c^*ac^*bc^*)$

Ukažte, že \mathcal{R} je uzavřena na h, h^{-1} .

5.10 Necht je dána abeceda $\{a, b, c\}$ a homomorfismus h ; $h(a) = ac, h(b) = cb, h(c) = ca$. Určete:

- $h(aabc), h(cbaa)$
- $h^{-1}(cccaaccb), h^{-1}(accba)$
- $h(L), L = \{a^n b^n c^n \mid n > 0\}$

5.11 Necht je dána abeceda $\{a, b, c\}$ a homomorfismus h ; $h(a) = aa, h(b) = ba, h(c) = a$. Určete:

- $h^{-1}(aabaaba)$
- $h(L), L = \{w \in \{a^*, b^*\} \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$
- $h^{-1}(L), L = \{w \in \{a^*\} \mid |w| = 2k, k \in \mathbb{N}\}$

5.12 Dokažte nebo vyvráťte

- $h(L_1 \cdot L_2) = h(L_1) \cdot h(L_2)$
- $h(L_1 \cup L_2) = h(L_1) \cup h(L_2)$
- $h((L_1 \cdot L_2)^R) = h(L_1^R) \cdot h(L_2^R)$
- $h(L_1 \cap L_2) = h(L_1) \cap h(L_2)$
- $h(h(L)) = h(L)$
- $h^{-1}(h(L)) = L$
- $h^{-1}(L_1 \cdot L_2) = h^{-1}(L_1) \cdot h^{-1}(L_2)$
- $h^{-1}(L_1 \cup L_2) = h^{-1}(L_1) \cup h^{-1}(L_2)$
- $h^{-1}(L_1 \cap L_2) = h^{-1}(L_1) \cap h^{-1}(L_2)$

Bezkontextové gramatiky

6.1 Co generují tyto gramatiky?

- a) $G = (\{S, B, A\}, \{a, b\}, P, S)$, kde
$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow aB \mid bA \mid \varepsilon, \\ A \rightarrow aS \mid bAA, \\ B \rightarrow bS \mid aBB \end{array} \right\}$$
- b) $G = (\{S, A\}, \{a, b\}, P, S)$, kde
$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow aAS \mid a, \\ A \rightarrow ba \mid Sba \end{array} \right\}$$

6.2 Pro následující gramatiku

$$G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S), \text{ kde}$$
$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow AaB \mid BaA, \\ A \rightarrow AB \mid a, \\ B \rightarrow BB \mid b \end{array} \right\}$$

- a) najděte derivační strom s výsledkem $bbbbaa$
b) je tento strom určený jednoznačně?
c) kolik různých nejlevějších odvození má slovo $bbbbaa$
d) je gramatika jednoznačná?
e) je jazyk $L(G)$ jednoznačný?

6.3 Jaké mají charakteristické vlastnosti derivační stromy pro regulární gramatiky?

6.4 Obsahuje množina jednoznačných CFL všechny regulární jazyky?

6.5 Odpovězte zda pro

$$G = (\{S\}, \{a\}, P, S), \text{ kde}$$
$$P = \{ S \rightarrow SSS \mid a \}$$

- a) je gramatika jednoznačná?
b) je jazyk $L(G)$ jednoznačný?

6.6 Navrhněte jednoznačnou gramatiku generující jazyk $L = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\} \cup \{a^k \mid k \geq 1\}$.

6.7 Navrhněte gramatiku pro jazyk $L = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \geq 1, i = j \text{ nebo } j \neq k\}$, je gramatika jednoznačná? Lze sestavit jednoznačnou gramatiku pro tento jazyk?

6.8 Najděte ekvivalentní redukovanou gramatiku k této gramatice:

$$G = (\{S, A, B, C, E, F, D\}, \{a, b, c\}, P, S), \text{ kde}$$
$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow aA \mid bB, \\ A \rightarrow aAB \mid aa \mid AC \mid AE, \\ B \rightarrow bBA \mid bb \mid CB \mid BF, \\ C \rightarrow DE, \\ D \rightarrow cc \mid DD, \\ E \rightarrow FF \mid FE, \\ F \rightarrow EcE \end{array} \right\}$$

6.9 Najděte bezkontextovou gramatiku, na níž lze ukázat, že opačné pořadí aplikace odstranění nenormovaných neterminálů a odstranění nedosažitelných symbolů vede k neredukované gramatice.

6.10 Je jazyk generovaný gramatikou G bezkontextový?

$G = (\{S, T\}, \{x, y\}, P, S)$, kde

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow xT, \\ T \rightarrow Sx, \\ xTx \rightarrow y \end{array} \right\}$$

6.11 Navrhněte bezkontextové gramatiky pro jazyky:

a) $L = \{ww^R \mid w \in \{a, b, c\}^*\}$

b) $L = \{w \mid w \in \{a, b, c\}^*, w = w^R\}$

c) $L = \{a^{3n+2}b^{2n} \mid n \geq 2\}$

d) $L = \{a^n b^n b^{m+1} c^{m-1} \mid n \geq 0, m \geq 1\}$

e) $L = \{a^n b^m c^m d^n \mid n, m \geq 0\}$

f) $L = \{uxv \mid u, x, v \in \{a, b, c\}^*, uv = (uv)^R, x = ca^n b^{2n} c, n \geq 0\}$

g) $L = \{w \mid w \in \{a, b\}^*, \#_a(w) > \#_b(w)\}$

h) $L = \{w \mid w \in \{a, b\}^*, \#_a(w) = 2 * \#_b(w)\}$

Normální formy CFG, pumping lemma pro CFL

7.1 Odstraňte ε -pravidla:

$$G = (\{S, A, B, C, D\}, \{b, c, a\}, P, S), \text{ kde}$$

$$P = \{ S \rightarrow ABC, \\ A \rightarrow AbA \mid BC, \\ B \rightarrow bB \mid b \mid cBbAa \mid \varepsilon, \\ C \rightarrow cD \mid c \mid Ab \mid \varepsilon, \\ D \rightarrow SSS \mid b \}$$

7.2 Odstraňte ε -pravidla:

$$G = (\{S, A, B, C, D\}, \{b, c\}, P, S), \text{ kde}$$

$$P = \{ S \rightarrow ABC, \\ A \rightarrow Ab \mid BC, \\ B \rightarrow bB \mid b \mid Ab \mid \varepsilon, \\ C \rightarrow cD \mid c \mid Ac \mid \varepsilon, \\ D \rightarrow SSD \mid cSAc \}$$

7.3 Odstraňte ε -pravidla:

$$G = (\{S, X, Y, Z\}, \{1, 0\}, P, S), \text{ kde}$$

$$P = \{ S \rightarrow 1X \mid Y1 \mid XZ, \\ X \rightarrow 0YZ1 \mid S1X \mid Y, \\ Y \rightarrow 1 \mid X1 \mid \varepsilon, \\ Z \rightarrow SZ \mid 0 \mid \varepsilon \}$$

7.4 Význam konstrukce množin N_ε na příkladu

$$G = (\{A, B, C\}, \{a, b, c\}, P, A), \text{ kde}$$

$$P = \{ A \rightarrow BC \mid a \mid \varepsilon, \\ B \rightarrow aB \mid ACC \mid b, \\ C \rightarrow cC \mid AA \mid c \}$$

7.5 Odstraňte jednoduchá pravidla. Diskuse o významu N_A .

$$G = (\{S, X, Y, A, D, B, C\}, \{b, a\}, P, S), \text{ kde}$$

$$P = \{ S \rightarrow X \mid Y, \\ A \rightarrow bS \mid D, \\ D \rightarrow ba, \\ B \rightarrow Sa \mid a, \\ X \rightarrow aAS \mid C, \\ C \rightarrow aD \mid S, \\ Y \rightarrow SBb \}$$

7.6 Převeďte do Chomského normální formy

$$G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S), \text{ kde}$$

$$P = \{ S \rightarrow SaSbS \mid aAa \mid bBb, \\ A \rightarrow aA \mid aaa \mid B \mid \varepsilon, \\ B \rightarrow Bb \mid bb \mid b \}$$

7.7 Převeďte do Chomského normální formy

$$G = (\{S, H, L\}, \{0, 1\}, P, S), \text{ kde}$$

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow 0H1 \mid 1L0 \mid \varepsilon, \\ H \rightarrow HH \mid 0H1 \mid LH \mid \varepsilon, \\ L \rightarrow LL \mid 1L0 \mid HL \mid \varepsilon \end{array} \right\}$$

7.8 Navrhněte gramatiku v CNF:

$$\begin{array}{l} \text{a) } L = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\} \\ \text{b) } L = \{a^{2i}b^{3i}c^j \mid i \geq 1, j \geq 0\} \end{array}$$

7.9 Necht G je gramatika v CNF. Necht $w \in L(G)$, $|w| = n$. Jaká je minimální a maximální délka odvození slova w v G ?

7.10 Odstraňte levou rekuzi a transformujte do GNF

$$G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S), \text{ kde}$$

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow Aa \mid Bb \mid aaA \mid SaA \mid Sbb, \\ A \rightarrow AAb \mid ab \mid SBb, \\ B \rightarrow Bbb \mid BBB \mid bAb \end{array} \right\}$$

7.11 Odstraňte levou rekuzi a transformujte do GNF

$$G = (\{S, A, B\}, \{1, 0\}, P, S), \text{ kde}$$

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow A1 \mid 0 \mid 1B, \\ A \rightarrow BS0 \mid 10 \mid SB0, \\ B \rightarrow 0B \mid B1B \mid S0 \end{array} \right\}$$

7.12 Odstraňte levou rekuzi a transformujte do GNF

$$G = (\{S, X, Y\}, \{c, d, b, a\}, P, S), \text{ kde}$$

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow Xc \mid Yd \mid Yb, \\ X \rightarrow Xb \mid a, \\ Y \rightarrow SaS \mid Xa \end{array} \right\}$$

7.13 Odstraňte levou rekuzi a transformujte do GNF

$$G = (\{S, T\}, \{t, s\}, P, S), \text{ kde}$$

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow TTt \mid Tt \mid TS \mid s, \\ T \rightarrow SsT \mid TsT \mid t \end{array} \right\}$$

7.14 Transformujte do Greibachové NF. Výslednou gramatiku převeďte do 3GNF.

$$G = (\{A, B, C, D\}, \{a, b\}, P, A), \text{ kde}$$

$$P = \left\{ \begin{array}{l} A \rightarrow BC, \\ B \rightarrow CD \mid AB, \\ C \rightarrow Aa \mid b, \\ D \rightarrow bA \mid DD \end{array} \right\}$$

7.15 Dokažte, že následující jazyky nejsou bezkontextové

$$\begin{array}{l} \text{a) } L = \{wcw \mid w \in \{a, b\}^*\} \\ \text{b) } L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\} \\ \text{c) } L = \{a^n b^m c^n d^m \mid n, m \geq 1\} \end{array}$$

Zásobníkové automaty, C-Y-K

8.1 Daný PDA $A = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{a, b, c, d\}, \{Z, A\}, \delta, q_0, Z, \{q_4\})$

$$\begin{aligned} \delta(q_0, a, Z) &= \{(q_0, AZ)\} & \delta(q_0, a, A) &= \{(q_0, AA)\} \\ \delta(q_0, b, A) &= \{(q_1, \varepsilon)\} & \delta(q_1, b, A) &= \{(q_1, \varepsilon)\} \\ \delta(q_1, \varepsilon, A) &= \{(q_2, A), (q_3, A)\} & \delta(q_2, c, A) &= \{(q_2, \varepsilon)\} \\ \delta(q_3, d, A) &= \{(q_3, \varepsilon)\} & \delta(q_2, \varepsilon, Z) &= \{(q_4, Z)\} \\ \delta(q_3, \varepsilon, Z) &= \{(q_4, Z)\} & & \end{aligned}$$

- Načrtněte stavový diagram PDA A .
- Naznačte 4 různé výpočty na vstupu a^3b^2c (stačí na obrázku).
- Popište jazyk $L(A)$.

8.2 Je daný PDA $A = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{a, b, c, d\}, \{X, Y, Z\}, \delta, q_0, Z, \{q_2, q_4\})$, kde

$$\begin{aligned} \delta(q_0, a, Z) &= \{(q_0, X)\} & \delta(q_0, a, X) &= \{(q_0, XX), (q_1, YX)\} \\ \delta(q_1, a, Y) &= \{(q_1, YY)\} & \delta(q_1, b, Y) &= \{(q_2, \varepsilon)\} \\ \delta(q_2, b, Y) &= \{(q_2, \varepsilon)\} & \delta(q_2, c, X) &= \{(q_3, \varepsilon)\} \\ \delta(q_3, c, X) &= \{(q_3, \varepsilon)\} & \delta(q_3, d, X) &= \{(q_4, \varepsilon)\} \end{aligned}$$

- Popište jazyk akceptovaný automatem, pokud $F = \{q_2\}$.
- Popište jazyk akceptovaný automatem s původním F , tj. $F = \{q_2, q_4\}$.

8.3 Konstruuje PDA (akceptující koncovým stavem nebo prázdným zásobníkem) pro jazyky:

- $L = \{a^i b^j \mid i \neq j, i, j \geq 0\}$
- $L = \{w \mid w \in \{a, b\}^*; w = w^R\}$
- $L = \{a^{3n} b^{2n} \mid n \geq 1\}$
- $L = \{a^{3n+2} b^{2n-1} \mid n \geq 1\}$
- $L = \{w \mid w \in \{a, b, c\}^*; \#_a(w) = \#_b(w)\}$
- $L = \{w \mid w \in \{a, b, c\}^*; \#_a(w) \neq \#_b(w)\}$
- $L = \{a^k b^j \mid 1 \leq j \leq k \leq 2j\}$
- $L = \{a^{n+m} b^{m+p} c^{p+n} \mid m, p, n \geq 1\}$
- $L = \{a^i b^j c^j \mid i, j \geq 1\} \cup \{a^k b^k c^m \mid k, m \geq 1\}$
- $L = \{a^{k_1} b a^{k_2} b \dots b a^{k_r} \mid r > 1, k_i \geq 1 (i = 1, \dots, r; \text{existuje } p, s : p \neq s, k_p = k_s)\}$

8.4 Daný PDA $A = (\{q_0, q_1\}, \{a, b\}, \{Z, A\}, \delta, q_0, Z, \{q_1\})$ akceptující koncovým stavem transformujte na ekvivalentní automat akceptující prázdným zásobníkem. Určete $L(A)$.

$$\begin{aligned} \delta(q_0, a, Z) &= \{(q_0, AZ)\} \\ \delta(q_0, a, A) &= \{(q_0, AA)\} \\ \delta(q_0, b, A) &= \{(q_1, \varepsilon)\} \end{aligned}$$

8.5 Daný PDA $A = (\{q\}, \{(\cdot)\}, \{Z, L, P\}, \delta, q, Z, \emptyset)$ akceptující prázdným zásobníkem transformujte na ekvivalentní automat akceptující koncovým stavem. Určete $L(A)$.

$$\begin{aligned}\delta(q, (\cdot), Z) &= \{(q, L)\} \\ \delta(q, (\cdot), L) &= \{(q, LL)\} \\ \delta(q, \cdot, L) &= \{(q, \varepsilon)\}\end{aligned}$$

8.6 Pro danou G navrhnete (rozšířený) PDA, který provádí syntaktickou analýzu:

- a) shora dolů,
- b) zdola nahoru.

V obou případech proveďte analýzu slova *ababbb*.

$G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$, kde

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow abAS \mid bb, \\ A \rightarrow AbB \mid aB \mid a, \\ B \rightarrow bSS \mid aB \mid \varepsilon \end{array} \right\}$$

8.7 Rozšířený zásobníkový automat, který vznikl metodou syntaktické analýzy zdola nahoru z gramatiky z příkladu 8.6 převedte na standardní zásobníkový automat.

8.8 Daný PDA $A = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b, c\}, \{A, B, C\}, \delta, q_0, A, \emptyset)$ akceptující prázdným zásobníkem transformujte na ekvivalentní bezkontextovou gramatiku.

$$\begin{aligned}\delta(q_0, a, A) &= \{(q_1, B)\} & \delta(q_1, c, A) &= \{(q_2, \varepsilon)\} & \delta(q_2, \varepsilon, B) &= \{(q_2, \varepsilon)\} \\ \delta(q_0, b, A) &= \{(q_1, AB)\} & \delta(q_1, a, B) &= \{(q_0, ABC)\} & \delta(q_2, \varepsilon, C) &= \{(q_0, A)\}\end{aligned}$$

8.9 Daný PDA $A = (\{q_0, q_1\}, \{a, b\}, \{Z, X\}, \delta, q_0, Z, \emptyset)$ akceptující prázdným zásobníkem transformujte na ekvivalentní bezkontextovou gramatiku.

$$\delta(q_0, a, Z) = \{(q_0, AA)\} \quad \delta(q_0, a, A) = \{(q_0, AAA)\} \quad \delta(q_0, b, A) = \{(q_1, \varepsilon)\} \quad \delta(q_1, b, A) = \{(q_1, \varepsilon)\}$$

8.10 Pomocí algoritmu C-Y-K rozhodněte, zda následující gramatika generuje slovo *kolaloka*.

$G = (\{S, A, B, D, C\}, \{k, o, a, l\}, P, S)$, kde

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow AB \mid DB, \\ A \rightarrow k \mid AB, \\ B \rightarrow o \mid BD \mid SC, \\ C \rightarrow a \mid AC \mid SA, \\ D \rightarrow l \mid DC \mid AC \end{array} \right\}$$

Uzávěrové vlastnosti CFL

9.1 O každé z následujících implikací rozhodněte, zda je pravdivá

- a) L_1, L_2 bezkontextové $\Rightarrow L_1 \cup L_2$ je kontextový
- b) L_1 bezkontextový $\wedge L_1 \cap L_2$ není bezkontextový $\Rightarrow L_2$ není bezkontextový
- c) L_1 regulární $\wedge L_2$ bezkontextový $\Rightarrow co-(L_1 \cap L_2)$ bezkontextový
- d) L_1 konečný $\wedge L_2$ bezkontextový $\Rightarrow co-(L_1 \cap L_2)$ bezkontextový

9.2 Jsou dané jazyky

$$L = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$$

$$R = L((a+b)^*a + \varepsilon)$$

Navrhněte PDA pro jazyk $L \cap R$. Jazyky L, R jsou akceptovány zásobníkovým a konečným automatem s těmito přechodovými funkcemi a koncovými stavy.

$$\begin{array}{lll} \delta_L(q_0, x, Z) = \{(q_0, xZ)\} & \forall x \in \{a, b\} & \delta_R(p_0, a) = p_0 \\ \delta_L(q_0, x, y) = \{(q_0, xy)\} & \forall x, y \in \{a, b\} & \delta_R(p_0, b) = p_1 \\ \delta_L(q_0, \varepsilon, x) = \{(q_1, x)\} & \forall x \in \{a, b, Z\} & \delta_R(p_1, b) = p_1 \\ \delta_L(q_1, x, x) = \{(q_1, \varepsilon)\} & \forall x \in \{a, b\} & \delta_R(p_1, a) = p_0 \\ \delta_L(q_1, \varepsilon, Z) = \{(q_2, Z)\} & & \\ F_L = \{q_2\} & & F_R = \{p_0\} \end{array}$$

9.3 Je dána bezkontextová gramatika

$$G = (\{S\}, \{a, b\}, P, S), \text{ kde}$$

$$P = \{ S \rightarrow aS \mid Sb \mid a \}$$

- a) Má tato gramatika vlastnost sebevlození?
- b) Má jazyk generovaný gramatikou vlastnost sebevlození?
- c) Je jazyk generovaný gramatikou regulární?
- d) Jaký je vztah mezi vlastností sebevlození a regularitou?

9.4 Je dán bezkontextový jazyk $L, L \subseteq \{a, b\}^*$

Zkonstruujeme nový jazyk L_1 takto:

$$\text{a) } L_1 = \{x \mid \exists y \in \{a, b\}^*; xy \in L\}$$

$$\text{b) } L_1 = \{x \mid \exists y \in \{a, b\}^*; yx \in L\}$$

Dokažte, že L_1 je taky bezkontextový.

Konstrukce Turingových strojů

10.1 Navrhněte deterministický jednopáskový Turingův stroj rozhodující jazyk $L = \{a^n b^m c^n d^m \mid m, n \geq 1\}$

10.2 Navrhněte deterministický jednopáskový TM se vstupní abecedou $\{0, 1\}$ a takový, že výpočty na slovech tvaru 0^*1^* jsou akceptující a výpočty na ostatních slovech jsou nekonečné.

10.3 Navrhněte 3-páskový (vstupní + 2 pracovní pásy) TM pro jazyk $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$

10.4 Navrhněte TM (determ. nebo nedeterm.) pro jazyk:

a) $L = \{a^i b^j c^k \mid k = ij, i, j \in \mathbb{N}\}$

b) $L = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$

c) $L = \{a^p \mid p \text{ není prvočíslo}\}$

d) $L = \{a^n w \mid w \in \{0, 1\}^*, w \text{ je binární zápis čísla } n\}$

Vztah TM a gramatik typu 0, uzávěrové vlastnosti

11.1 Objasněte rozdíl mezi pojmy TM akceptuje a TM rozhoduje.

11.2 Je daný DTM T (resp. jeho část). Podle algoritmu ze skript navrhnete k němu ekvivalentní gramatiku:

$$\begin{aligned}\delta(q, \triangleright) &= (q, \triangleright, R) & \delta(q, a) &= (p, A, R) \\ \delta(p, b) &= (q, a, L) & \delta(q, \sqcup) &= (p, A, R) \\ \delta(p, \sqcup) &= (q, a, L) & \delta(q, b) &= (q_{accept}, A, R)\end{aligned}$$

Kde \triangleright je levá koncová značka, \sqcup označuje prázdné políčko, stavy jsou $\{p, q, q_{accept}\}$, q je počáteční stav, vstupní abeceda je $\{a, b\}$ a pásková abeceda odpovídá množině $\{\triangleright, \sqcup, A, a, b\}$.

11.3 O každé z následujících implikací rozhodněte, zda je pravdivá.

- R je regulární, L je rekurzivně spočetný $\Rightarrow R \cap L$ je regulární
- L je rekurzivní \Rightarrow co- L je rekurzivní
- L je rekurzivní $\Rightarrow L^*$ je rekurzivní
- L je kontextový \Rightarrow co- L je rekurzivní
- L není rekurzivní \Rightarrow co- L není rekurzivní
- L není rekurzivní a R je rekurzivní $\Rightarrow L \setminus R$ není rekurzivní
- L není rekurzivní, R je rekurzivní a $R \subseteq L \Rightarrow L \setminus R$ není rekurzivní

11.4 Navrhnete gramatiky pro následující jazyky:

- $\{w \mid w \in \{a, b, c\}^*, \#_a(w) = \#_b(w) = \#_c(w)\}$
- $\{ww \mid w \in \{a, b, c\}^*\}$
- $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$
- $\{a^n \mid n \text{ je mocnina } 2\}$

11.5 Ukažte, že jazyk $L = \{w \mid w \text{ je kód dvojice } (A, v) \text{ takové, že TM } A \text{ zastaví svůj výpočet nad slovem } v\}$ je jazyk typu 0 dle Chomského hierarchie.

11.6 Existuje jazyk, který není ani jazykem typu 0 dle Chomského hierarchie?

Redukce

12.1 Rozhodněte, zda platí následující implikace. Své rozhodnutí zdůvodněte.

- a) $A \leq_m B \Rightarrow co-A \leq_m co-B$
- b) $A \leq_m B$ a B je regulární $\Rightarrow A$ je regulární
- c) A je rekurzivně spočetná a $co-A \leq_m A \Rightarrow A$ je rekurzivní
- d) A je rekurzivně spočetná a $A \leq_m co-A \Rightarrow A$ je rekurzivní
- e) $A \leq_m B$ a A je rekurzivní $\Rightarrow B$ je rekurzivní
- f) A je rekurzivně spočetná $\Rightarrow A \leq_m HALT$

12.2 Je dán jazyk $A = \{\langle M \rangle \mid \text{výpočet TM } M \text{ na slově } \varepsilon \text{ je konečný}\}$.
Dokažte, že A není rekurzivní. (Návod: najděte redukci problému zastavení na A .)
Je jazyk A rekurzivně spočetný?
Je komplement jazyka A rekurzivně spočetný?

12.3 Nalezněte řešení následujícího Postova systému:

$$\left\{ \left[\frac{aa}{a} \right], \left[\frac{ab}{abab} \right], \left[\frac{b}{a} \right], \left[\frac{aba}{b} \right] \right\}$$

12.4 Ukažte, že Postův korespondenční problém je nerozhodnutelný, i když se omezíme na abecedu $\{0, 1\}$.

12.5 Ukažte, že problém ekvivalence dvou Turingových strojů

$$EQ = \{\langle \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \rangle \mid \mathcal{M}_1 \text{ a } \mathcal{M}_2 \text{ jsou Turingovy stroje a } L(\mathcal{M}_1) = L(\mathcal{M}_2)\}$$

je nerozhodnutelný.