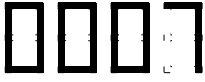


Jméno:

UČO:



líst

učo

body

Oblast strojově snímaných informací. Svě učo a číslo lístu vyplňte zleva dle vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

1. [0,5 bodu] Necht'  $\Sigma = \{a, b, c\}$ . Uvažte jazyk  $L$  nad  $\Sigma$  definovaný jako

$$L = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ začíná na } c \wedge (\#_a(w) > \#_b(w) \vee 2 \mid \#_a(w))\}.$$

Rozhodněte, zda je  $L$  regulární, a své tvrzení dokažte. Je-li vaše odpověď, že se jedná o regulární jazyk, uveďte příslušnou regulární gramatiku nebo konečný automat včetně všech formálních náležitostí. Pokud se podle vás o regulární jazyk nejedná, dokažte tuto skutečnost pomocí *Lemmatu o vkládání* (Pumping lemma).

Připomínáme, že  $2 \mid \#_a(w)$  znamená, že 2 dělí  $\#_a(w)$ , tedy  $\#_a(w)$  je sudé (párne).

Jazyk  $L$  není regulární. Neregularitu jazyka  $L$  dokážeme pomocí obměny lemmatu o vkládání.

*Důkaz.*

- Necht'  $n \in \mathbb{N}$  je libovolné přirozené číslo, nadále pevné.
- Zvolme slovo  $w = cb^{2n}a^{2n+1}$ . Slovo  $w$  patří do jazyka  $L$ , protože začíná na  $c$  a  $\#_a(w) > \#_b(w)$ , a jeho délka je  $|w| = 4n + 2 \geq n$ .
- Uvažme libovolné rozdělení slova  $w$  na podslova  $x, y, z \in \Sigma^*$ , pro která platí  $w = xyz$ ,  $|xy| \leq n$  a  $y \neq \varepsilon$ . Dále rozeberme případy dle toho, zda je  $x$  prázdné slovo.

1. Pokud  $x = \varepsilon$ , pak slova  $x, y, z$  musí mít následující tvar:

$$\begin{aligned} x &= \varepsilon, \\ y &= cb^k, \\ z &= b^{2n-k}a^{2n+1} \end{aligned}$$

pro nějaké  $k \in \mathbb{N}_0$  takové, že  $k + 1 \leq n$ .

Zvolme  $i = 0$ . Pak slovo

$$w' = xy^0z = z = b^{2n-k}a^{2n+1}$$

nepatří do jazyka  $L$ , protože nezačíná na  $c$ .

2. Pokud  $x \neq \varepsilon$ , pak slova  $x, y, z$  musí mít následující tvar:

$$\begin{aligned} x &= cb^k, \\ y &= b^l, \\ z &= b^{2n-k-l}a^{2n+1} \end{aligned}$$

pro nějaká  $k, l \in \mathbb{N}_0$  taková, že  $k + l + 1 \leq n$  a  $l \geq 1$ .

Zvolme  $i = 2$  a ukažme, že slovo

$$w' = xy^2z = cb^k \cdot b^{2l} \cdot b^{2n-k-l}a^{2n+1} = cb^{2n+l}a^{2n+1}$$

nepatří do jazyka  $L$ , jelikož z předpokladu  $l \geq 1$  dostáváme  $2n + 1 \leq 2n + l$ , tedy  $\#_a(w) \leq \#_b(w)$ . Zároveň 2 nedělí  $2n + 1$ , tedy  $\#_a(w)$  je liché. Tudíž slovo  $w'$  nepatří do jazyka  $L$ , jak jsme chtěli ukázat.

Z obměny lemmatu o vkládání tak dostáváme, že jazyk  $L$  není regulární. □