Jméno: **UČO:**

0007 *list* 1 *učo* *body*

Oblast strojově snímaných informací. Své učo a číslo listu vyplňte zleva dle vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

1. [0,5 bodu] Nechť $\Sigma = \{a, b, c\}$. Uvažte jazyk L nad Σ definovaný jako

$$L \;=\; \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ začíná na } c \wedge (\#_a(w) > \#_b(w) \vee 2 \mid \#_a(w))\}\,.$$

Rozhodněte, zda je L regulární, a své tvrzení dokažte. Je-li vaše odpověď, že se jedná o regulární jazyk, uveďte příslušnou regulární gramatiku nebo konečný automat včetně všech formálních náležitostí. Pokud se podle vás o regulární jazyk nejedná, dokažte tuto skutečnost pomocí *Lemmatu o vkládání* (Pumping lemma).

Připomínáme, že $2 \mid \#_a(w)$ znamená, že 2 dělí $\#_a(w)$, tedy $\#_a(w)$ je sudé (párne).

Jazyk L není regulární. Neregularitu jazyka L dokážeme pomocí obměny lemmatu o vkládaní.

Důkaz.

- Nechť $n \in \mathbb{N}$ je libovolné přirozené číslo, nadále pevné.
- Zvolme slovo $w = cb^{2n}a^{2n+1}$. Slovo w patří do jazyka L, protože začína na c a $\#_a(w) > \#_b(w)$, a jeho délka je $|w| = 4n + 2 \geq n$.
- Uvažme libovolné rozdělení slova w na podslova $x, y, z \in \Sigma^*$, pro která platí $w = xyz$, $|xy| \leq n$ a $y \neq \varepsilon$. Dále rozeberme případy dle toho, zda je x prázdné slovo.

  1. Pokud $x = \varepsilon$, pak slova x, y, z musí mít následující tvar:

     $$x = \varepsilon,$$
     $$y = cb^k,$$
     $$z = b^{2n-k}a^{2n+1}$$

     pro nějaké $k \in \mathbb{N}_0$ takové, že $k + 1 \leq n$.
     Zvolme $i = 0$. Pak slovo

     $$w' \;=\; xy^0z \;=\; z \;=\; b^{2n-k}a^{2n+1}$$

     nepatří do jazyka L, protože nezačíná na c.
  2. Pokud $x \neq \varepsilon$, pak slova x, y, z musí mít následující tvar:

     $$x = cb^k,$$
     $$y = b^l,$$
     $$z = b^{2n-k-l}a^{2n+1}$$

     pro nějaká $k, l \in \mathbb{N}_0$ taková, že $k + l + 1 \leq n$ a $l \geq 1$.
     Zvolme $i = 2$ a ukažme, že slovo

     $$w' \;=\; xy^2z \;=\; cb^k \cdot b^{2l} \cdot b^{2n-k-l}a^{2n+1} \;=\; cb^{2n+l}a^{2n+1}$$

     nepatří do jazyka L, jelikož z předpokladu $l \geq 1$ dostáváme $2n + 1 \leq 2n + l$, tedy $\#_a(w) \leq \#_b(w)$. Zároveň 2 nedělí $2n + 1$, tedy $\#_a(w)$ je liché. Tudíž slovo w' nepatří do jazyka L, jak jsme chtěli ukázat.

Z obměny lemmatu o vkládaní tak dostáváme, že jazyk L není regulární. □