

Jméno:

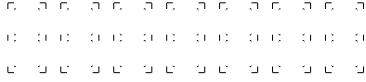
UČO:



líst



učo



body



Oblast strojově snímaných informací. Svě učo a číslo lístu vyplňte zleva dle vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

1. [0,5 bodu] Necht  $\Sigma = \{a, b, c\}$ . Mějme jazyk

$$L = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ začíná na } c \implies (\#_a(w) > \#_b(w) \vee 2 \mid \#_a(w))\}.$$

Dokažte pomocí Myhillovy-Nerodovy věty, že jazyk  $L$  není regulární.

Připomínáme, že  $2 \mid \#_a(w)$  znamená, že 2 dělí  $\#_a(w)$ , tedy  $\#_a(w)$  je sudé (párne).

*Důkaz.* Důkaz neregularity jazyka  $L$  provedeme pomocí Myhillovy-Nerodovy věty (konkrétně z tvrzení „Relace  $\sim_L$  má nekonečný index  $\implies L$  není rozpoznatelný deterministickým konečným automatem“). Chceme tedy dokázat, že  $\sim_L$  má nekonečný index.

Uvažme nekonečně mnoho slov ve tvaru  $s_n = ca^{2n+1}$  pro  $n \in \mathbb{N}_0$ . Ukážeme, že žádná dvě taková slova nepatří do stejné třídy rozkladu podle  $\sim_L$  (tím ukážeme, že počet tříd rozkladu je nekonečný).

Uvažme tedy libovolná dvě slova  $s_i = ca^{2i+1}$ ,  $s_j = ca^{2j+1}$ , kde  $i, j \in \mathbb{N}_0$  a (bez újmy na obecnosti)  $i > j$ . Přiretžeme k těmto slovům slovo  $b^{2i}$ . Tím vznikají následující slova:

$$r_{ii} = s_i \cdot b^{2i} = ca^{2i+1}b^{2i}$$

$$r_{ji} = s_j \cdot b^{2i} = ca^{2j+1}b^{2i}$$

Slovo  $r_{ii} = ca^{2i+1}b^{2i}$  patří do jazyka  $L$ , protože začíná na „c“ a  $\#_a(r_{ii}) = 2i + 1 > 2i = \#_b(r_{ii})$ . Současně ale slovo  $r_{ji} = ca^{2j+1}b^{2i}$  do jazyka  $L$  nepatří, protože začíná na „c“, ale neplatí ani  $\#_a(r_{ji}) > \#_b(r_{ji})$  ani  $2 \mid \#_a(r_{ji})$ . První požadavek neplatí, protože  $i$  a  $j$  jsou přirozená čísla a  $i > j$ , což dává

$$i > j \implies i \geq j + 1 \implies 2i \geq 2j + 2 \implies 2i > 2j + 1.$$

Pak ale  $\#_a(r_{ji}) = 2j + 1 < 2i = \#_b(r_{ji})$ . Zároveň  $\#_a(r_{ji}) = 2j + 1$  zjevně není dělitelné dvěma.

Neplatí tedy  $r_{ii} = s_i \cdot b^{2i} \in L \iff r_{ji} = s_j \cdot b^{2i} \in L$  a tím pádem platí  $s_i \not\sim_L s_j$ . Z toho vyplývá, že každé ze slov  $s_n$  pro  $n \in \mathbb{N}_0$  patří do samostatné třídy rozkladu podle  $\sim_L$ . Tříd rozkladu je tudíž alespoň tolik, kolik je přirozených čísel, tedy nekonečně mnoho. Relace  $\sim_L$  má nekonečný index, což znamená, že  $L$  není rozpoznatelný DFA, a tedy  $L$  není regulární.  $\square$