Jméno: **UČO:**

0007 *list* 1 *učo* *body*

Oblast strojově snímaných informací. Své učo a číslo listu vyplňte zleva dle vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. [0,5 bodu] Uvažte následující čtyři relace na slovech nad abecedou $\Sigma = \{a, b, c\}$:

a) $u\, R_1\, v \overset{def}{\iff} 2 \mid \#_a(u) \iff 2 \mid \#_a(v)$

b) $u\, R_2\, v \overset{def}{\iff} u$ a v začíná na stejný počet písmen a

c) $u\, R_3\, v \overset{def}{\iff} u$ končí na $a \wedge v$ končí na a

d) $u\, R_4\, v \overset{def}{\iff} u$ končí na $aa \iff v$ končí na aa

Pro každou z uvedených relací rozhodněte, zda se jedná o ekvivalenci. Pokud to není ekvivalence, dokažte proč. Pokud to ekvivalence je, toto tvrzení nedokazujte, pouze určete její index a popište jednotlivé třídy rozkladu podle dané relace. Následně rozhodněte, zda jde o pravou kongruenci a své tvrzení dokažte (s důkazem, že relace je pravá kongruence, vám může pomoct tvrzení 2.21 ze skript, nezapomeňte však, že pokud se odvoláváte na definice, věty nebo důkazy z materiálů, musíte vždy uvést, kde a jak je používáte).

---

a) Relace R_1 je ekvivalence s indexem 2. První třída rozkladu obsahuje právě slova obsahující sudý počet a, druhá třída obsahuje všechna ostatní.

Relace R_1 je pravou kongruencí. Nechť $u, v, w \in \Sigma^*$ jsou libovolná a platí $u\, R_1\, v$. Pak $\#_a(u) = \#_a(v) + 2k$ pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$. Tím pádem platí

$$\#_a(uw) = \#_a(u) + \#_a(w) = \#_a(v) + 2k + \#_a(w) = \#_a(vw) + 2k,$$

tedy $\#_a(uw)$ je dělitelné 2 právě tehdy, když $\#_a(vw)$ je dělitelné dvěma, a proto platí $uw\, R_1\, vw$. Ukázali jsme, že pro libovolná slova u, v, w platí $u\, R_1\, v \Rightarrow uw\, R_1\, vw$. Relace R_1 je tedy pravou kongruencí.

Pozn.: Pro důkaz pravé kongruence je také možné použít tvrzení 2.21 ze skript a uvažovat pouze přiřetězení jednoho písmene.

b) Relace R_2 je ekvivalence, která nemá konečný index (její index je ∞). Jednotlivé třídy rozkladu jsou určeny počtem a od začátku slova po první b nebo c, popř. po konec slova pokud je slovo tvaru a^k.

Jednotlivé třídy rozklady je tedy možné popsat jejich reprezentanty jako $T_n = [a^n]$, kde $[a^n] = \{w \mid w = a^n \cdot u, u \in \{a, b, c\}^*, u \text{ nezačíná na } a\}$ a $n \in \mathbb{N}_0$.

Relace R_2 není pravou kongruencí. Protipříkladem jsou slova a, ab, pro která platí $a\, R_2\, ab$, ale po přiřetězení slova a neplatí $aa\, R_2\, aba$.

c) Relace R_3 není ekvivalence, protože není reflexivní. Protipříkladem je slovo b, jelikož neplatí bR_3b.

d) Relace R_4 je ekvivalence indexu 2. První třída rozkladu obsahuje právě slova končící na aa, druhá třída obsahuje všechna ostatní.

Relace R_4 není pravou kongruencí. Protipříkladem jsou slova ε a a, kdy platí $\varepsilon\, R_4\, a$, ale po přiřetězení slova a neplatí $a\, R_4\, aa$.