**Jméno:** **UČO:**

0007 *list* 1 *učo* *body*

*Oblast strojově snímaných informací. Své učo a číslo listu vyplňte zleva dle vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.* 0123456789

**3. [0,5 bodu]** Rozhodněte, zda existují jazyky $L_i$ nad abecedou $\Sigma = \{a, b\}$ takové, že:

a) Index $\sim_{L_1}$ je 5 a pro všechna slova $u, v \in L_1$ platí $|u| < 5 \wedge |v| < 5 \implies u \sim_{L_1} v$.

b) Index $\sim_{L_2}$ je 3 a pro každé $w \in L_2$ platí $2 \mid |w|$.

c) Index $\sim_{L_3}$ je 2 a právě jedna z tříd rozkladu je konečná.

Pokud rozhodnete, že jazyk $L_i$ existuje, uveďte jej. Uveďte také třídy rozkladu $\Sigma^*$ podle prefixové ekvivalence ($\sim_{L_i}$) pro tento jazyk a vyjádřete jazyk $L_i$ jako sjednocení některých tříd tohoto rozkladu. Není třeba dokazovat, že $\sim_{L_i}$ je prefixovou ekvivalencí pro jazyk $L_i$.
Pokud rozhodnete, že jazyk $L_i$ neexistuje, své tvrzení dokažte.

---

a) Takový jazyk je například $\Sigma^3$ – jazyk všech slov délky 3. Jeho prefixová ekvivalence má následující třídy ekvivalence:

- $T_0 = \{\varepsilon\}$, tj. jazyk slov délky 0,
- $T_1 = \Sigma$,
- $T_2 = \Sigma^2$,
- $T_3 = \Sigma^3$ a
- $T_4 = \Sigma^4 \cdot \Sigma^*$.

Jazyk $L_1$ je roven třídě $T_3$.

b) Takový jazyk existuje. Je jím například jazyk

$$L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid |w| = 2k, k \in \mathbb{N}^+\}.$$

Jeho prefixová ekvivalence má následující třídy ekvivalence:

- $T_1 = \{\varepsilon\}$, tj. jazyk slov délky 0,
- $T_2 = L_2$, tedy slova sudé kladné délky a
- $T_3 = \Sigma \cdot \{aa, ab, ba, bb\}^*$, jazyk slov liché délky.

Jazyk $L_2$ je pak roven třídě $T_2$.

c) Řešení vyhovuje například jazyk $L_3 = \{\varepsilon\}$ obsahující pouze prázdné slovo. (Poznamenejme, že jediný další jazyk, který zadání vyhovuje, je komplement tohoto jazyka.) Jeho prefixová ekvivalence má následující třídy:

- $T_1 = \{\varepsilon\}$ a
- $T_2 = \Sigma^+$,

přičemž jazyk $L_3$ je přímo roven třídě $T_1$.