Jméno: **UČO:**

0007 *list* 1 *učo* *body*

Oblast strojově snímaných informací. Své učo a číslo listu vyplňte zleva dle vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

1. [0,5 bodu] Nechť L, R a K jsou libovolné jazyky nad abecedou $\Sigma = \{a, b, c\}$. Jazyk nazýváme *kokonečný*, právě když je doplňkem konečného jazyka. Operace Δ se nazývá *symetrický rozdíl* a je definována jako $L\Delta R = (L \setminus R) \cup (R \setminus L)$.

Dokažte nebo vyvraťte každé z následujících tvrzení:

a) co$-K \cup (L \cdot R^R)$ není regulární $\implies$ L není regulární nebo co$-R$ není regulární nebo K není kokonečný.

b) L je regulární $\implies$ jazyk $W = \{u \in \Sigma^* \mid u \in L$ a u začíná na znak $a\}$ je regulární.

c) L je nekonečný regulární $\implies$ $(L \cdot L^R) \cap (L^R \cdot L)$ je konečný.

d) L je regulární a R je regulární $\implies$ $L\Delta R$ je regulární.

Pokud budete potřebovat, můžete v celém příkladu využívat toho, že na přednášce a cvičeních byly ukázány některé neregulární jazyky (jejich neregularitu nemusíte znovu dokazovat). V důkazech tvrzení a), b) a c) můžete rovněž použít znalosti o uzavřenosti třídy regulárních jazyků na operace prezentované na přednášce. V důkazu tvrzení d) *není povoleno* použít uzávěrové vlastnosti regulárních jazyků, můžete však využít tvrzení (2.1) z důkazu věty (2.10) ze skript.

---

a) co$-K \cup (L \cdot R^R)$ není regulární $\implies$ L není regulární nebo co$-R$ není regulární nebo K není kokonečný.

Tvrzení platí.

Dokážeme obměnu implikace, tedy tvrzení

$$L \text{ je regulární a co}-R \text{ je regulární a } K \text{ je kokonečný} \implies \text{co}-K \cup (L \cdot R^R) \text{ je regulární.}$$

Jelikož co$-R$ je regulární, pak z uzavřenosti regulárních jazyků na doplněk plyne, že $R =$ co$-($co$-R)$ je regulární. Z uzavřenosti regulárních jazyků na reverzi je regulární i R^R. Protože K je kokonečný, je jeho doplněk co$-K$ konečný, a tedy regulární. Díky uzavřenosti na zřetězení a sjednocení je co$-K \cup (L \cdot R^R)$ také regulární.

b) L je regulární $\implies$ jazyk $W = \{u \in \Sigma^* \mid u \in L$ a u začíná na znak $a\}$ je regulární.

Tvrzení platí.

Uvažme jazyk všech slov nad abecedou Σ začínajících na a, který můžeme definovat například jako $\{a\} \cdot \Sigma^*$. Tento jazyk je regulární, například proto, že vznikl zřetězením konečného (a tedy regulárního) jazyka $\{a\}$ a známého regulárního jazyka Σ^*. Jazyk W můžeme vyjádřit jako $L \cap \{a\} \cdot \Sigma^*$. Protože L je regulární, z uzavřenosti regulárních jazyků na průnik je i W regulární.

c) L je nekonečný regulární $\implies$ $(L \cdot L^R) \cap (L^R \cdot L)$ je konečný.

Tvrzení neplatí.

Jako protipříklad uvažme nekonečný regulární jazyk $L = \{a\}^*$. Protože pro každé slovo $w \in L$ platí $w = w^R$, je $L^R = \{a\}^*$. Zřetězením jazyka $\{a\}^*$ se sebou samým získáme opět jazyk $\{a\}^*$, takže $L \cdot L^R = \{a\}^* \cdot \{a\}^* = \{a\}^*$ a $L^R \cdot L = \{a\}^*$. Díky tomu platí $(L \cdot L^R) \cap (L^R \cdot L) = \{a\}^* \cap \{a\}^* = \{a\}^*$, což je nekonečný jazyk.

d) L je regulární a R je regulární $\implies$ $L\Delta R$ je regulární.

Tvrzení platí.

K důkazu tvrzení použijeme paralelní synchronní kompozici. Jelikož L i R jsou regulární jazyky, existují konečné automaty s totálními přechodovými funkcemi $\mathcal{M}_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ a $\mathcal{M}_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$ takové, že $L(\mathcal{M}_1) = L$ a $L(\mathcal{M}_2) = R$. Podobně jako v definici (2.9) ze skript definujeme automat $\mathcal{M}_1\Delta\mathcal{M}_2$ jako $(Q_1 \times Q_2, \Sigma, \delta, (q_1, q_2), F)$, kde

- $F = \{(p, q) \in Q_1 \times Q_2 \mid (p \in F_1 \wedge q \notin F_2) \vee (p \notin F_1 \wedge q \in F_2)\} = (F_1 \times Q_2)\Delta(Q_1 \times F_2)$,
- $\delta((p, q), a) = (\delta_1(p, a), \delta_2(q, a))$ pro libovolné $p \in Q_1, q \in Q_2$ a $a \in \Sigma$.

Stavy automatu $\mathcal{M}_1\Delta\mathcal{M}_2$ jsou tedy dvojice (p, q), kde p je stav automatu $\mathcal{M}_1$ a q je stav automatu $\mathcal{M}_2$. Akceptačními stavy budou právě ty dvojice (p, q), kde právě jeden z p, q je akceptačním stavem ve svém původním automatu. Automat $\mathcal{M}_1\Delta\mathcal{M}_2$ tedy akceptuje právě ta slova w, která akceptoval právě jeden z automatů $\mathcal{M}_1$ a $\mathcal{M}_2$. To jsou právě ta slova, která patří do právě jednoho z jazyků L nebo R, a tedy tvoří jazyk $L\Delta R$. Tuto úvahu můžeme formálně zapsat následujícím způsobem.

Dokážeme, že $L(\mathcal{M}_1\Delta\mathcal{M}_2) = L(\mathcal{M}_1)\Delta L(\mathcal{M}_2)$. Pro libovolné slovo w nad abecedou Σ platí, že $w \in L(\mathcal{M}_1\Delta\mathcal{M}_2)$ právě když $\hat{\delta}((q_1, q_2), w) = (p, q)$, kde $p \in F_1$ a $q \notin F_2$, nebo $p \notin F_1$ a $q \in F_2$. Podle tvrzení (2.1) z důkazu věty (2.10) ze skript je $\hat{\delta}((q_1, q_2), w) = (p, q)$ právě tehdy, když $\hat{\delta_1}(q_1, w) = p$ a $\hat{\delta_2}(q_2, w) = q$. Podmínka $p \in F_1$ a $q \notin F_2$, nebo $p \notin F_1$ a $q \in F_2$ je ekvivalentní tomu, že $w \in L(\mathcal{M}_1)$ a $w \notin L(\mathcal{M}_2)$, nebo $w \notin L(\mathcal{M}_1)$ a $w \in L(\mathcal{M}_2)$, což se dá přepsat jako $w \in L(\mathcal{M}_1)\Delta L(\mathcal{M}_2)$. Dostáváme tedy, že $w \in L(\mathcal{M}_1\Delta\mathcal{M}_2)$ právě když $w \in L(\mathcal{M}_1)\Delta L(\mathcal{M}_2)$.

Sestrojili jsme konečný automat $\mathcal{M}_1\Delta\mathcal{M}_2$, který akceptuje jazyk $L\Delta R$. Tento jazyk je tedy regulární.