Jméno: **UČO:**

0007 *list* 1 *učo* *body*

Oblast strojově snímaných informací. Své učo a číslo listu vyplňte zleva dle vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. [0,5 bodu] Nechť L je libovolný jazyk nad abecedou $\Sigma = \{a, b, c\}$.
Mějme operaci $\rightleftarrows : 2^{\Sigma^*} \to 2^{\Sigma'^*}$, kde $\Sigma' = \left\{ \dfrac{x}{y} \;\middle|\; x, y \in \Sigma \right\}$, takovou, že jazyk

$$\rightleftarrows(L) = \left\{ \frac{w}{v} \;\middle|\; w \in L,\ v \in L^R,\ |w| = |v| \right\} \subseteq \Sigma'^*$$

obsahuje právě pro každou dvojici stejně dlouhých slov $u \in L$ a $v \in L^R$ modifikované slovo w, které vznikne umístěním u nad v.

Například tedy:

$$\begin{aligned}
\rightleftarrows(\{a,b,c\}) &= \left\{ \frac{a}{a}, \frac{a}{b}, \frac{a}{c}, \frac{b}{a}, \frac{b}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}, \frac{c}{b}, \frac{c}{c} \right\} \\
\rightleftarrows(\{ab, ba, abc\}) &= \left\{ \frac{ab}{ab}, \frac{ab}{ba}, \frac{ba}{ab}, \frac{ba}{ba}, \frac{abc}{cba} \right\} \\
\rightleftarrows(\emptyset) &= \emptyset \\
\rightleftarrows(\{\varepsilon\}) &= \{\varepsilon\} \\
\rightleftarrows(\Sigma^*) &= \Sigma'^*
\end{aligned}$$

Vaším úkolem je rozhodnout, zda pro každý regulární jazyk L je jazyk $\rightleftarrows(L)$ taktéž regulární. Tedy zda je třída regulárních jazyků uzavřená na operaci $\rightleftarrows$. Uveďte své rozhodnutí a odpověď dokažte, a to tak, že:

- Pokud rozhodnete, že třída regulárních jazyků není uzavřená na operaci $\rightleftarrows$, najděte regulární jazyk L takový, že jazyk $\rightleftarrows(L)$ regulární není. Neregularitu jazyka $\rightleftarrows(L)$ dokažte buď odvoláním se na známé neregulární jazyky, pomocí obměny lemmatu o vkládání (Pumping lemma), nebo použitím Myhillovy-Nerodovy věty.
- Pokud rozhodnete, že je, dokažte tvrzení buď pomocí známých uzávěrových vlastností třídy regulárních jazyků prezentovaných na přednášce, nebo konstruktivně popsáním algoritmu na transformaci nějakého formalismu pro popis regulárních jazyků (například transformací automatu pro jazyk L na automat pro jazyk $\rightleftarrows(L)$). Správnost svého algoritmu nemusíte dokazovat.

Poznámka: Pokud píšete řešení v TEXu, před odevzdáním prosím odmažte zadání.

Třída regulárních jazyků je uzavřená na operaci $\rightleftarrows$. Můžeme to dokázat například popisem algoritmu na konstrukci konečného automatu $A_{\rightleftarrows}$ pro libovolný jazyk L, který akceptuje právě jazyk $\rightleftarrows(L)$.

Hlavní myšlenka:

Mějme libovolný regulární jazyk L. Pak také L^R je regulární a pro oba tyto jazyky existuje automat A, respektive A_R. Dále použijeme konstrukci podobnou synchronní paralelní kompozici, jen místo čtení jednoho písmene ze vstupu a kontroly přechodu a následné akceptace v obou automatech rozdělíme vstupní symbol z abecedy Σ' na dva symboly ze Σ, kde pro vrchní znak kontrolujeme přechod a akceptaci v A a pro spodní znak v A_R.

Jméno: **UČO:**

Formální zápis konstrukce automatu $A_{\rightleftarrows}$ pro daný jazyk L

Nechť L je libovolný, nadále pevný, regulární jazyk. Pak existuje konečný automat rozpoznávající L. Označme tento automat $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ a předpokládejme, že má totální přechodovou funkci (toto můžeme předpokládat například díky lemmatu 2.6 ze skript).

Sestrojíme konečný automat A_R rozpoznávající jazyk L^R následovně:

- Vytvoříme $\varepsilon-$NFA A' pro jazyk L^R:

  $A' = (Q \cup \{q'\}, \Sigma, \delta', q', \{q_0\})$, kde q' je nový stav ($q \notin Q$) a δ' vznikne z δ tak, že 'otočíme' všechny hrany a přidáme ε přechody z q' do každého stavu v F.

  Formálněji: δ' je definována jako $q \in \delta'(p, a) \iff \delta(q, a) = p$ pro $p, q \in Q$ a $a \in \Sigma$ a $\delta'(q', \varepsilon) = F$.

- Sestrojíme NFA A'' k $\varepsilon-$NFA A' dle algoritmu na odstranění ε přechodů z věty 2.48 ve skriptech.

- Determinizujeme A'' algoritmem 2.3 ze skript, čímž získáme DFA $A_R = (Q_R, \Sigma, \delta_R, q_R, F_R)$.

Konstrukci automatu akceptujího L_R zde rozepisujeme proto, že ve skriptech je popsána jen vágně.

Nyní sestrojíme výsledný automat $A_{\rightleftarrows} = (Q_{\rightleftarrows}, \Sigma', \delta_{\rightleftarrows}, q_{\rightleftarrows}, F_{\rightleftarrows})$ pro jazyk L.

Položme $Q_{\rightleftarrows} = Q \times Q_R$, $q_{\rightleftarrows} = (q_0, q_R)$ a $F_{\rightleftarrows} = \{(p, q) \mid p \in F \land q \in F_R\} = F \times F_R$. Přechodovou funkci $\delta_{\rightleftarrows}$ definujeme jako $\delta_{\rightleftarrows}((p, q), \frac{a}{b}) = (\delta(p, a), \delta_R(q, b))$.

Připomeňme, že q_0 a q_R jsou iniciální stavy automatů A a A_R, a že množiny F a F_R jsou množiny koncových stavů týž automatů. Dále také platí $a, b \in \Sigma$ a $\frac{a}{b} \in \Sigma'$.

Dokázali jsme, že pro libovolný regulární jazyk L zvládneme zkonstruovat konečný automat $A_{\rightleftarrows}$, který akceptuje právě jazyk $\rightleftarrows(L)$. Z toho plyne, že pro L regulární je i jazyk $\rightleftarrows(L)$ regulární, a tedy že třída regulárních jazyků je uzavřena na operaci $\rightleftarrows$.