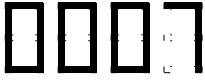


Jméno:

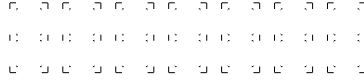
UČO:



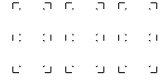
líst



učo



body



Oblast strojově snímaných informací. Svě učo a číslo lístu vyplňte zleva dle vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

2. [0,5 bodu] Necht'  $\Sigma = \{a, b, c\}$ . Napište algoritmus, který pro zadanou bezkontextovou gramatiku  $\mathcal{G} = (N, \Sigma, P, S)$  spočítá množinu všech neterminálů takových, že z každého z nich lze vygenerovat slovo, které obsahuje sudý (párny) počet symbolů  $a$ . Výstupem algoritmu tedy bude množina neterminálů

$$N_{2a} = \{X \in N \mid \exists w \in \Sigma^*. X \Rightarrow^* w \wedge 2 \mid \#_a(w)\}.$$

Příklad gramatiky:

$$G = (\{D, A, B, C, E, F\}, \{a, b, c\}, P, D)$$

$$P = \left\{ \begin{array}{ll} D \rightarrow Bc \mid acC, & A \rightarrow aa \mid \varepsilon, \\ B \rightarrow aAb \mid abc, & C \rightarrow aB \mid c, \\ E \rightarrow BE \mid b, & F \rightarrow FFA \mid a \end{array} \right.$$

Korektní výstup algoritmu pro ni:  $N_{2a} = \{A, C, E, F\}$ .

Popište princip fungování vašeho algoritmu a dokažte, že je tento algoritmus konvergentní (vždy skončí). Můžete využívat libovolné algoritmy z přednášky, musíte na to však upozornit v textu.

**Myšlienka:**

Budeme postupne budovať množiny neterminálov, z ktorých vieme odvodiť párny (sudý), resp. nepárny (lichý) počet písmen  $a$ , označíme ich  $EVEN$  a  $ODD$ . Použijeme techniku zo skript, kedy  $EVEN_i$  a  $ODD_i$  budú definované iba pomocou ich predchádzajúcich množín ( $EVEN_{i-1}$  a  $ODD_{i-1}$ ) a nemenných pravidiel danej gramatiky, teda ak sa budú  $EVEN_i$  a  $ODD_i$  rovnat so svojimi predchodcami, môžeme algoritmus ukončiť.

Na zistenie, či je možné z daného neterminálu vygenerovať párny (sudý), resp. nepárny (lichý) počet  $a$ , budeme opakovane prechádzať všetky prepisovacie pravidlá gramatiky. Ak bude mať pravá strana vhodnú paritu znakov  $a$  a budeme vedieť, že z neterminálov na pravo môžeme vygenerovať slovo s vhodnou paritou znakov  $a$ , potom to bude platiť aj pre neterminál na ľavej strane.

Konkrétnejšie zistíme, či vieme neterminály na pravej strane pravidla rozdeliť na dve skupiny s určitými požiadavkami. Chceme, aby v skupine boli tie, o ktorých vieme, že je možné z nich vygenerovať slovo s párnym (sudým), resp. nepárnym (lichým) počtom  $a$ . Bude nás zaujímať, či existuje také rozdelenie, že počet neterminálov v "nepárnej (lichej) skupine" spolu s počtom znakov  $a$  je párny (sudý), resp. nepárny (lichý). Toto nám bude stačiť, pretože počet neterminálov v "párnej skupine" neovplyvní výslednú paritu.

Jméno:

UČO:

0007

líst

2

učo

body

0

Oblast strojově snímaných informací. Svě učo a číslo lístu vyplňte zleva dle vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

**Pseudokód:**

**vstup:** CFG  $\mathcal{G} = (N, \Sigma, P, S)$ .

**výstup:** Množina  $N_{2a} = \{X \in N \mid \exists w \in \Sigma^*. X \Rightarrow^* w \wedge 2 \mid \#_a(w)\}$ .

```

1  OdstranitNenormovaneSymboly( $\mathcal{G}$ ) (Algoritmus 3.1)
2   $EVEN_0 = \emptyset$ 
3   $ODD_0 = \emptyset$ 
4   $i = 0$ 
5  repeat
6       $i = i + 1$ 
7       $EVEN_i = EVEN_{i-1}$ 
8       $ODD_i = ODD_{i-1}$ 
9      for ( $Y \rightarrow \alpha \in P$ ) do
10         označme  $\alpha = \beta_0 X_1 \beta_1 X_2 \dots \beta_{n-1} X_n \beta_n$ , pre  $\beta_j \in \Sigma^*, X_j \in N, n \in \mathbb{N}_0$ 
11         if
12              $\exists E \subseteq EVEN_{i-1}, O \subseteq ODD_{i-1} :$ 
13              $E \cup O = \{X_j \mid 1 \leq j \leq n\} \wedge E \cap O = \emptyset \wedge 2 \mid (|O| + \#_a(\alpha))$ 
14             then
15                  $EVEN_i = EVEN_{i-1} \cup \{Y\}$ 
16         if
17              $\exists E \subseteq EVEN_{i-1}, O \subseteq ODD_{i-1} :$ 
18              $E \cup O = \{X_j \mid 1 \leq j \leq n\} \wedge E \cap O = \emptyset \wedge 2 \nmid (|O| + \#_a(\alpha))$ 
19             then
20                  $ODD_i = ODD_{i-1} \cup \{Y\}$ 
19 until  $EVEN_i == EVEN_{i-1} \wedge ODD_i == ODD_{i-1}$ ;
20  $N_{2a} = EVEN_i$ 

```

**Dôkaz konvergenencie:**

Vonkajší cyklus sa bude opakovať, dokým obe množiny ostanú nezmenené, teda zastaví sa pri podmienke  $EVEN_i == EVEN_{i-1}$  a  $ODD_i == ODD_{i-1}$ . Keďže v každom kroku do množín buď pridávame, alebo ich nemeníme, bude platiť  $EVEN_{i-1} \subseteq EVEN_i, ODD_{i-1} \subseteq ODD_i$ . Zároveň sú podmnožinami konečnej množiny všetkých neterminálov  $N$ , symbolicky  $EVEN_i \subseteq N, ODD_i \subseteq N$ . Množiny  $EVEN_i$  a  $ODD_i$  sa teda postupne budú zväčšovať, alebo zostanú rovnaké. Ak zostanú rovnaké, cyklus sa podľa podmienky zastaví. Môžu sa zväčšiť, keďže  $N$  je konečná množina, po konečnom počte krokov sa môžu rovnať  $N$ . Potom už sa však ako podmnožiny  $N$  nemôžu meniť, teda cyklus určite skončí.

**Poznámky:**

Je dobré si uvedomiť, že pri inicializácii by sme mohli  $EVEN_0, ODD_0$  dať tie neterminály, ktoré majú pravidlo na prepísanie na slovo s párnym, resp. nepárnym počtom  $a$ . To však nepotrebujeme, pretože tieto neterminály sa pridávajú v prvom kroku.

Zároveň si premyslime, že program sa správne vysporiada so situáciou, kedy prepisovacie pravidlo obsahuje neterminály, ktoré zatiaľ nie sú v ani v  $EVEN_i$  ani  $ODD_i$ . Potom určite neexistuje také delenie na  $E, O$ , že  $E, O$  sú podmnožiny  $EVEN_i$  a  $ODD_i$ .