Jméno: **UČO:**

0007 *list* 1 *učo* *body*

Oblast strojově snímaných informací. Své učo a číslo listu vyplňte zleva dle vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. [0,5 bodu] Nechť $\Sigma = \{a, b, c\}$. Napište algoritmus, který pro zadanou bezkontextovou gramatiku $\mathcal{G} = (N, \Sigma, P, S)$ spočítá množinu všech neterminálů takových, že z každého z nich lze vygenerovat slovo, které obsahuje sudý (párny) počet symbolů a. Výstupem algoritmu tedy bude množina neterminálů

$$N_{2a} = \{X \in N \mid \exists w \in \Sigma^*. X \Rightarrow^* w \wedge 2 \mid \#_a(w)\}.$$

Příklad gramatiky:

$$G = (\{D, A, B, C, E, F\}, \{a, b, c\}, P, D)$$

$$\begin{aligned} P = \{D &\to Bc \mid acC, & A &\to aa \mid \varepsilon, \\ B &\to aAb \mid abc, & C &\to aB \mid c, \\ E &\to BE \mid b, & F &\to FFA \mid a\} \end{aligned}$$

Korektní výstup algoritmu pro ni: $N_{2a} = \{A, C, E, F\}$.

Popište princip fungování vašeho algoritmu a dokažte, že je tento algoritmus konvergentní (vždy skončí). Můžete využívat libovolné algoritmy z přednášky, musíte na to však upozornit v textu.

Myšlienka:

Budeme postupne budovať množiny neterminálov, z ktorých vieme odvodiť párny (sudý), resp. nepárny (lichý) počet písmen a, označíme ich $EVEN$ a ODD. Použijeme techniku zo skrípt, kedy $EVEN_i$ a ODD_i budú definované iba pomocou ich predchádzajúcich množín ($EVEN_{i-1}$ a ODD_{i-1}) a nemenných pravidiel danej gramatiky, teda ak sa budú $EVEN_i$ a ODD_i rovnať so svojími predchodcami, môžeme algoritmus ukončiť.

Na zistenie, či je možné z daného neterminálu vygenerovať párny (sudý), resp. nepárny (lichý) počet a, budeme opakovane prechádzať všetky prepisovacie pravidlá gramatiky. Ak bude mať pravá strana vhodnú paritu znakov a a budeme vedieť, že z neterminálov na pravo môžme vygenerovať slovo s vhodnou paritou znakov a, potom to bude platiť aj pre neterminál na ľavej strane.

Konkrétnejšie zistíme, či vieme neterminály na pravej strane pravidla rozdeliť na dve skupiny s určitými požiadavkami. Chceme, aby v skupine boli tie, o ktorých vieme, že je možné z nich vygenerovať slovo s párnym (sudým), resp. nepárnym (lichým) počtom a. Bude nás zaujímať, či existuje také rozdelenie, že počet neterminálov v "nepárnej (lichej) skupine" spolu s počtom znakov a je párny (sudý), resp. nepárny (lichý). Toto nám bude stačiť, pretože počet neterminálov v "párnej skupine" neovyplyvní výslednú paritu.

Jméno: **UČO:**

0007 *list* 2 *učo* *body* 0

Pseudokód:

vstup: CFG $\mathcal{G} = (N, \Sigma, P, S)$.

výstup: Množina $N_{2a} = \{X \in N \mid \exists w \in \Sigma^*. X \Rightarrow^* w \wedge 2 \mid \#_a(w)\}$.

$\mathit{OdstranitNenormovaneSymboly}(\mathcal{G})$ (Algoritmus 3.1)
$EVEN_0 = \emptyset$
$ODD_0 = \emptyset$
$i = 0$
repeat
  $i = i + 1$
  $EVEN_i = EVEN_{i-1}$
  $ODD_i = ODD_{i-1}$
  for $(Y \to \alpha \in P)$ **do**
    označme $\alpha = \beta_0 X_1 \beta_1 X_2 \dots \beta_{n-1} X_n \beta_n$, pre $\beta_j \in \Sigma^*, X_j \in N, n \in \mathbb{N}_0$
    if
      $\exists E \subseteq EVEN_{i-1},\ O \subseteq ODD_{i-1}:$
      $E \cup O = \{X_j \mid 1 \leq j \leq n\} \wedge E \cap O = \emptyset \wedge 2 \mid (|O| + \#_a(\alpha))$
    then
      $EVEN_i = EVEN_i \cup \{Y\}$
    if
      $\exists E \subseteq EVEN_{i-1},\ O \subseteq ODD_{i-1}:$
      $E \cup O = \{X_j \mid 1 \leq j \leq n\} \wedge E \cap O = \emptyset \wedge 2 \nmid (|O| + \#_a(\alpha))$
    then
      $ODD_i = ODD_i \cup \{Y\}$
until $EVEN_i == EVEN_{i-1} \wedge ODD_i == ODD_{i-1}$;
$N_{2a} = EVEN_i$

Dôkaz konvergencie:

Vonkajší cyklus sa bude opakovať, dokým obe množiny ostanú nezmenené, teda zastaví sa pri podmienke $EVEN_i == EVEN_{i-1}$ a $ODD_i == ODD_{i-1}$. Keďže v každom kroku do množín buď pridávame, alebo ich nemeníme, bude platiť $EVEN_{i-1} \subseteq EVEN_i, ODD_{i-1} \subseteq ODD_i$. Zároveň sú podmnožinami konečnej množiny všetkých neterminálov N, symbolicky $EVEN_i \subseteq N, ODD_i \subseteq N$. Množiny $EVEN_i$ a ODD_i sa teda postupne budú zväčšovať, alebo zostanú rovnaké. Ak zostanú rovnaké, cyklus sa podľa podmienky zastaví. Môžu sa zväčšiť, keďže N je konečná množina, po konečnom počte krokov sa môžu rovnať N. Potom už sa však ako podmnožiny N nemôžu meniť, teda cyklus určite skončí.

Poznámky:

Je dobré si uvedomiť, že pri inicializácií by sme mohli $EVEN_0, ODD_0$ dať tie neterminály, ktoré majú pravidlo na prepísanie na slovo s párnym, resp. nepárnym počtom a. To však nepotrebujeme, pretože tieto neterminály sa pridajú v prvom kroku.

Zároveň si premyslime, že program sa správne vysporiada so situáciou, kedy prepisovacie pravidlo obsahuje neterminály, ktoré zatiaľ nie sú v ani v $EVEN_i$ ani ODD_i. Potom určite neexistuje také delenie na E, O, že E, O sú podmnožiny $EVEN_i$ a ODD_i.