Jméno: **UČO:**

0007 *list* 1 *učo* *body*

Oblast strojově snímaných informací. Své učo a číslo listu vyplňte zleva dle vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. [0,5 bodu] Uvažme následující jazyk L nad abecedou $\Sigma = \{a, b, c\}$.

$$L = \{w \in \Sigma^* \colon w \text{ začíná na } c \iff (\#_a(w) > \#_b(w) \land \#_c(w) \mid \#_a(w))\}$$

Tento jazyk není bezkontextový. Dokažte tuto skutečnost pomocí *Lemmatu o vkládání pro bezkontextové jazyky* (Pumping lemma pro CFL).

Zadaný jazyk není bezkontextový, což dokážeme pomocí Lemmatu o vkládání pro bezkontextové jazyky:

- Nechť $n \in \mathbb{N}$ je libovolné pevné.
- Uvažme slovo $z = c^{n+1}b^n a^{n+1}$. Toto slovo začíná na c a zároveň splňuje $\#_a(z) = n + 1 > n = \#_b(z)$ i $\#_c(z) = n+1 \mid n+1 = \#_a(z)$, leží proto v jazyku L. Zároveň platí, že $|z| = 3n+2 > n$.
- Nechť $uvwxy = z$ je libovolné rozdělení slova z takové, že $vx \neq \varepsilon$ a $|vwx| \leq n$.
- Ukážeme, že existuje $i \in \mathbb{N}_0$ takové, že slovo $z_i = uv^iwx^iy \notin L$.

Poznamenejme, že pro libovolné $i \in \mathbb{N}_0$ slovo z_i začíná na c, takže abychom ukázali, že nějaké z_i není v L, stačí (a je potřeba) ukázat, že nesplňuje

$$\#_a(z_i) > \#_b(z_i) \land \#_c(z_i) \mid \#_a(z_i). \tag{1}$$

Rozdělme nyní argumentaci podle toho, zda vx obsahuje a, nebo ne:

1. Pokud vx obsahuje aspoň jedno a, tak zvolme $i = 2$. Máme následující nerovnosti:

   $$\#_a(z_2) = \#_a(uvwxy) + \#_a(vx) \geq (n + 1) + 1 = n + 2 > 1 \cdot (n + 1);$$
   $$\#_a(z_2) = \#_a(uvwxy) + \#_a(vx) \leq (n + 1) + |vx| \leq (n + 1) + n = 2n + 1 < 2 \cdot (n + 1).$$

   Dostáváme tedy, že $\#_a(z_2)$ leží mezi dvěma násobky čísla $n + 1$, což znamená, že tímto číslem nemůže být dělitelné. Jelikož $|vwx| \leq n$ a slovo vx obsahuje a, tak nemůže obsahovat c. Máme tedy $\#_c(z_2) = n + 1$ a z_2 tedy nesplňuje podmínku (1) – neleží tedy v L.

2. Nyní zbývá vyřešit případ, kdy a není obsaženo ve vx. Ukážeme, že pak z_3 neleží v L. Jelikož $vx \neq \varepsilon$, tak víme, že existuje písmeno $p \in \{b, c\}$, které se vyskytuje ve vx. Pak dostáváme, že

   $$\begin{aligned} \#_p(z_3) = \#_p(uv^3wx^3y) &= \#_p(uvwxy) + \#_p(v^2x^2) \\ &\geq \#_p(z) + 2 \\ &\geq n + 2 && (\text{jelikož } \#_b(z) = n \text{ a } \#_c(z) = n + 1) \\ &> n + 1 = \#_a(z_3) && (\text{jelikož } \#_a(z_3) = \#_a(z) = n + 1). \end{aligned}$$

   Ať už tedy p bylo b nebo c, tak dostáváme, že p je obsaženo ve slově z_3 vícekrát než a, takže nemůže splňovat (1) a neleží tedy v L.

Ve všech případech jsme našli takové i, že z_i neleží v L. Tento jazyk tedy není bezkontextový podle obměny pumping lemmatu pro bezkontextové jazyky.

Poznámka na závěr:

Na závěr ještě poznamenejme, že v obou dvou případech šlo zvolit $i = 2$, ale výsledná argumentace by byla ve druhé části trošku komplikovanější. Naopak v první části šlo zvolit $i = 0$ a argumentace by možná byla trochu jednodušší. Volbou $i = 2$ byl zvolen důkaz, který reflektoval to, že zadání mluví o dělitelnosti a ne jen o nerovnosti.