Formální jazyky a automaty

Věta o vkládání, Myhillova-Nerodova věta

Jan Křetínský

Fakulta informatiky, MU Brno

Jaro 2024

Omezená vyjadřovací síla konečných automatů

$$L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\} = \{\varepsilon, ab, aabb, aaabbb, aaaabbbb \ldots\}$$

$$a \; a \; a \; a \; a \; b \; b \; b \; b \; b$$

$a^n b^n$ není regulární

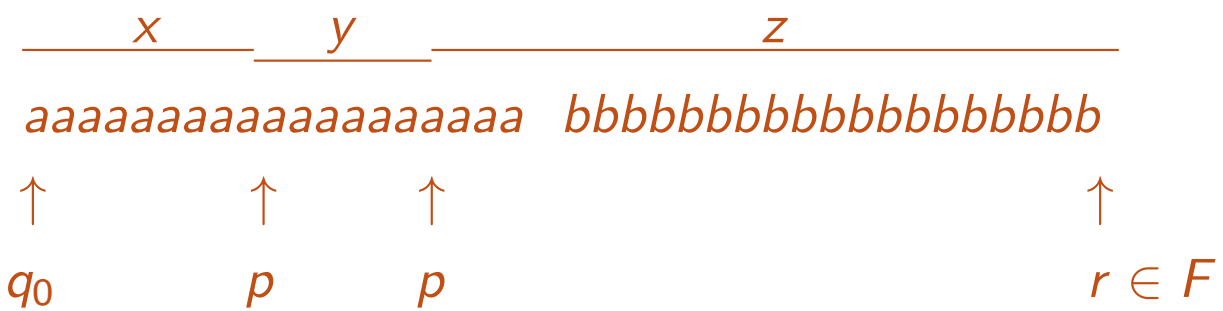
Předpokládejme, že existuje automat $\mathcal{M}$ přijímající jazyk L.
Nechť $\mathcal{M}$ má k stavů.
Uvažme výpočet $\mathcal{M}$ na slově $a^n b^n$ kde $n > k$.

$$aaaaaaaaaaaaaaaaaaaa \quad bbbbbbbbbbbbbbbbbbbb$$

Protože $n > k$, musí existovat (z Dirichletova principu) stav p takový, že při čtení iniciální posloupnosti symbolů a projde automat stavem p (alespoň) dvakrát.

$a^n b^n$ není regulární

Předpokládejme, že existuje automat $\mathcal{M}$ přijímající jazyk L.
Nechť $\mathcal{M}$ má k stavů.
Uvažme výpočet $\mathcal{M}$ na slově $a^n b^n$ kde $n > k$.



Protože $n > k$, musí existovat (z Dirichletova principu) stav p takový, že při čtení iniciální posloupnosti symbolů a projde automat stavem p (alespoň) dvakrát.

Proto $xyz \in L \implies$

- $xz \in L$
- $xyyz \in L$

$a^n b^n$ není regulární – formálně

Platí $\hat{\delta}(q_0, x) = p \quad \hat{\delta}(p, y) = p \quad \hat{\delta}(p, z) = r \in F$

Pak ale i $\hat{\delta}(q_0, xz) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q_0, x), z) = \hat{\delta}(p, z) = r \in F$

Analogicky můžeme y i (vícekrát) „vsunout“:

$$\begin{aligned}
\hat{\delta}(q_0, xyyz) &= \hat{\delta}(\hat{\delta}(\hat{\delta}(\hat{\delta}(q_0, x), y), y), z) \\
&= \hat{\delta}(\hat{\delta}(\hat{\delta}(p, y), y), z) \\
&= \hat{\delta}(\hat{\delta}(p, y), z) \\
&= \hat{\delta}(p, z) \\
&= r \in F
\end{aligned}$$

Pumping lemma: Obecná formalizace

Lemma [o vkládání / pumping lemma]

Nechť L je regulární jazyk.
Pak existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že libovolné slovo $w \in L$ délky alespoň n lze psát ve tvaru $w = xyz$, kde $|xy| \leq n$, $y \neq \varepsilon$ a $xy^i z \in L$ pro každé $i \in \mathbb{N}_0$.

Důkaz. Nechť DFA $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ rozpoznává jazyk L.
Položme $n = card(Q)$.

Pro libovolné slovo $w \in L$ délky alespoň n platí, že automat $\mathcal{M}$ projde při akceptování slova w (alespoň) dvakrát stejným stavem.

Slovo w tedy můžeme rozdělit na tři části: $w = xyz$, kde $y \neq \varepsilon$ a $\hat{\delta}(q_0, x) = p$, $\hat{\delta}(p, y) = p$ a $\hat{\delta}(p, z) = r \in F$. Je zřejmé, že ke zopakování nějakého stavu dojde nejpozději po zpracování prvních n znaků a tedy lze klást $|xy| \leq n$.

Dále $\hat{\delta}(p, y^i) = p$ pro libovolné $i \in \mathbb{N}_0$, proto také $\hat{\delta}(q_0, xy^i z) = r$, tj. $xy^i z \in L(\mathcal{M})$ pro každé $i \in \mathbb{N}_0$. □

Pumping lemma: Použití

Pumping lemma

$$L \text{ je regulární} \implies \exists n \in \mathbb{N} \,.\, \forall w \in L \,.\, \big(|w| \geq n \implies \exists x, y, z \,.\, \big(w = xyz \;\wedge\; y \neq \varepsilon \;\wedge\; |xy| \leq n \;\wedge\; \forall i \geq 0 \,.\, xy^i z \in L \big) \big)$$

Pomocí pumping lemmatu lze dokázat, že nějaký jazyk není regulární:

Nechť pro jazyk L platí:

- pro libovolné $n \in \mathbb{N}$
- existuje takové slovo $w \in L$ délky alespoň n, pro které platí, že
- při libovolném rozdělení slova w na takové tři části x, y, z, že $|xy| \leq n$ a $y \neq \varepsilon$,
- existuje alespoň jedno $i \in \mathbb{N}_0$ takové, že $xy^i z \notin L$.

Pak L není regulární.

Myhillova-Nerodova věta: Motivace I

Algebraický popis automatu: DFA $\mapsto \sim$

Každý DFA $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ s totální přechodovou funkcí definuje ekvivalenci $\sim$ na Σ^*:

$$u \sim v \overset{def}{\iff} \hat{\delta}(q_0, u) = \hat{\delta}(q_0, v)$$

Příklad: $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) \geq 2\}$

Pravá kongruence

Definice 2.20.

Nechť Σ je abeceda a $\sim$ je ekvivalence na Σ^*. Ekvivalence $\sim$ je pravá (zprava invariantní) kongruence, pokud pro každé $u, v, w \in \Sigma^*$ platí:

$$u \sim v \implies uw \sim vw$$

Ekvivalentně (Tvrzení 2.21.):

...pro každé $u, v \in \Sigma^*$, $a \in \Sigma$ platí $u \sim v \implies ua \sim va$.

(Implikace $\implies$ je triviální, implikace $\impliedby$ se snadno ukáže indukcí k délce zprava přiřetězeného slova w.)

Index ekvivalence $\sim$ je počet tříd rozkladu $\Sigma^*/_\sim$.
Je-li těchto tříd nekonečně mnoho, klademe index $\sim$ roven ∞.

Příklady

Jsou tyto relace na slovech nad abecedou $\Sigma = \{a, b\}$ pravé kongruence?

1. $u \sim v \iff u$ a v začínají stejným symbolem nebo $u = v = \varepsilon$
   index $\sim$ je ...

2. $u \sim v \iff \#_a(u) = \#_a(v)$
   index $\sim$ je ...

3. $u \sim v \iff u$ a v mají stejné předposlední písmeno nebo $|u|, |v| \leq 1$
   index $\sim$ je ...

Myhillova-Nerodova věta: Motivace II

A naopak: $\sim \mapsto$ DFA

Pravá kongruence $\sim$ na Σ^* s konečným indexem jednoznačně (až na pojmenování stavů) určuje DFA $(Q, \Sigma, \delta, q_0, \emptyset)$ s totální přechodovu funkcí a bez nedosažitelných stavů slpňující:

$$\hat{\delta}(q_0, u) = \hat{\delta}(q_0, v) \iff u \sim v$$

Příklad: $u \sim v \iff u$ a v začínají stejným symbolem nebo $u = v = \varepsilon$

Prefixová ekvivalence

Definice 2.25.

Nechť L je libovolný (ne nutně regulární) jazyk nad abecedou Σ. Na množině Σ^* definujeme relaci $\sim_L$ zvanou prefixová ekvivalence pro L takto:

$$u \sim_L v \quad \overset{def}{\iff} \quad \forall w \in \Sigma^* : uw \in L \iff vw \in L$$

Věta.

$\sim_L$ je pravá kongruence.

Příklady

1. $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) \geq 2\}$
   index $\sim_L$ je ...

2. $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$
   index $\sim_L$ je ...

Myhillova-Nerodova věta: Formalizace

Věta 2.28. (Myhill-Nerode, 1957)

Nechť L je jazyk nad Σ. Pak tato tvrzení jsou ekvivalentní:

1. L je rozpoznatelný deterministickým konečným automatem.
2. L je sjednocením některých tříd rozkladu určeného pravou kongruencí na Σ^* s konečným indexem.
3. Relace $\sim_L$ má konečný index.

Důkaz.

$1 \implies 2$

$2 \implies 3$

$3 \implies 1$

□

Myhillova-Nerodova věta: Důkaz 1 $\Longrightarrow$ 2

Jestliže L je rozpoznatelný deterministickým konečným automatem **pak** L je sjednocením některých tříd rozkladu určeného pravou kongruencí na Σ^* s konečným indexem.

- pro daný L rozpoznávaný automatem $\mathcal{M}$ zkonstruujeme relaci požadovaných vlastností
- $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, δ je totální
- na Σ^* definujme binární relaci $\sim$ předpisem

$$u \sim v \quad \overset{def}{\Longleftrightarrow} \quad \hat{\delta}(q_0, u) = \hat{\delta}(q_0, v)$$

- ukážeme, že $\sim$ má požadované vlastnosti

$$u \sim v \quad \overset{def}{\iff} \quad \hat{\delta}(q_0, u) = \hat{\delta}(q_0, v)$$

- $\sim$ je ekvivalence (je reflexivní, symetrická, tranzitivní)
- $\sim$ má konečný index
  třídy rozkladu odpovídají stavům automatu
- $\sim$ je pravá kongruence:
  Nechť $u \sim v$ a $a \in \Sigma$. Pak
  $\hat{\delta}(q_0, ua) = \delta(\hat{\delta}(q_0, u), a) = \delta(\hat{\delta}(q_0, v), a) = \hat{\delta}(q_0, va)$ a tedy
  $ua \sim va$.
- L je sjednocením těch tříd rozkladu určeného relací $\sim$, které odpovídají koncovým stavům automatu $\mathcal{M}$ □

Myhillova-Nerodova věta: Důkaz 2 $\Longrightarrow$ 3

Nechť L je sjednocením některých tříd rozkladu určeného pravou kongruencí $\sim$ na Σ^* s konečným indexem.
Pak prefixová ekvivalence $\sim_L$ má konečný index.

- $u \sim v \implies u \sim_L v$ pro všechna $u, v \in \Sigma^*$ (tj. $\sim \subseteq \sim_L$) [Lemma 2.27]

- každá třída ekvivalence relace $\sim$ je **celá** obsažena v nějaké třídě ekvivalence $\sim_L$
- index ekvivalence $\sim_L$ je menší nebo roven indexu ekvivalence $\sim$
- $\sim$ má konečný index $\implies$ $\sim_L$ má konečný index $\square$

Myhillova-Nerodova věta: Důkaz 3 $\Longrightarrow$ 1

Nechť prefixová ekvivalence $\sim_L$ má konečný index.
Pak jazyk L je rozpoznatelný deterministickým konečným automatem.
Zkonstruujeme automat $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ přijímající L:

- $Q = \Sigma^*/_{\sim_L}$
  Stavy jsou třídy rozkladu Σ^* určeného ekvivalencí $\sim_L$.
  Je jich tedy konečně mnoho.
- $q_0 = [\varepsilon]$
- δ je definována pomocí reprezentantů: $\delta([u], a) = [ua]$
  Definice δ je korektní, protože nezávisí na volbě reprezentanta.
- $F = \{[v] \mid v \in L\}$

Důkaz korektnosti, tj. $L = L(\mathcal{M})$

- $\hat{\delta}([\varepsilon], v) = [v]$ pro každé $v \in \Sigma^*$ (indukcí k délce slova v)
- $v \in L(\mathcal{M}) \iff \hat{\delta}([\varepsilon], v) \in F \iff [v] \in F \iff v \in L$ $\square$

Myhill-Nerodova věta: Použití 1/3

Větu lze použít k důkazu neregularity jazyka, např.

$$L = \{a^i b^j \mid i, j \geq 0,\ i \neq j\}$$

Nechť $i \neq j$. Pak $a^i \not\sim_L a^j$, protože $a^i b^j \in L$ ale $a^j b^j \notin L$.
Žádné dvě ze slov $a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, \ldots$ nepadnou do stejné třídy ekvivalence relace $\sim_L$.
$\sim_L$ **nemá** konečný index $\implies$ L **není regulární** $(\neg 3 \implies \neg 1)$

Myhill-Nerodova věta: Použití 2/3

Větu lze použít i k důkazu regularity jazyka, např.

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) \geq 2\}$$

Třídy ekvivalence relace $\sim_L$:
$$T_1 = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = 0\}$$
$$T_2 = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = 1\}$$
$$T_3 = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) \geq 2\}$$

$\sim_L$ **má** konečný index $\implies$ L **je** rozpoznatelný deterministickým konečným automatem, tj. **regulární** $(3 \implies 1)$

Myhill-Nerodova věta: Použití 3/3

Minimalizace DFA

Věta 2.29. a 2.31.

Minimální deterministický konečný automat s totální přechodovou funkcí akceptující jazyk L je určen jednoznačně až na isomorfismus (tj. přejmenování stavů). Počet stavů tohoto automatu je roven indexu prefixové ekvivalence $\sim_L$.

Myhill-Nerodova věta: Použití 3/3

Minimalizace DFA

Věta 2.29. a 2.31.

Minimální deterministický konečný automat s totální přechodovou funkcí akceptující jazyk L je určen jednoznačně až na isomorfismus (tj. přejmenování stavů). Počet stavů tohoto automatu je roven indexu prefixové ekvivalence $\sim_L$.

Učení DFA