Formální jazyky a automaty

Minimalizace, učení automatů

Jan Křetínský

Fakulta informatiky, MU Brno

Jaro 2024

Minimální automat

Minimální DFA

Deterministický konečný automat $\mathcal{M}$ s totální přechodovou funkcí nazveme minimální konečný automat pro jazyk $L(\mathcal{M})$, neexistuje-li ekvivalentní DFA s totální přechodovou funkcí a menším počtem stavů.

Důsledek 2.31.

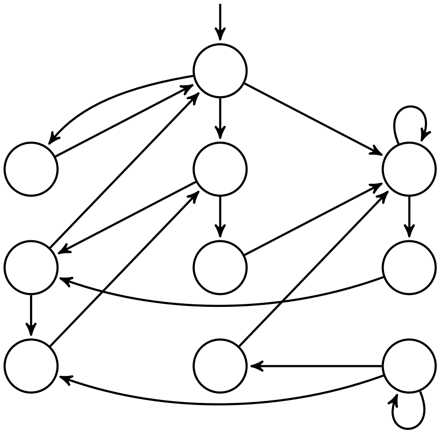
Minimální konečný automat akceptující regulární jazyk L je určen jednoznačně až na isomorfismus (tj. přejmenování stavů) a má $|\sim_L|$ stavů.

Důkaz. MN + Lemma 2.27 $\square$

Eliminace nedosažitelných stavů: Příklad

Definice 2.18.

Nechť $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je DFA. Stav $q \in Q$ nazveme dosažitelný, pokud existuje $w \in \Sigma^*$ takové, že $\hat{\delta}(q_0, w) = q$. Stav je nedosažitelný, pokud není dosažitelný.

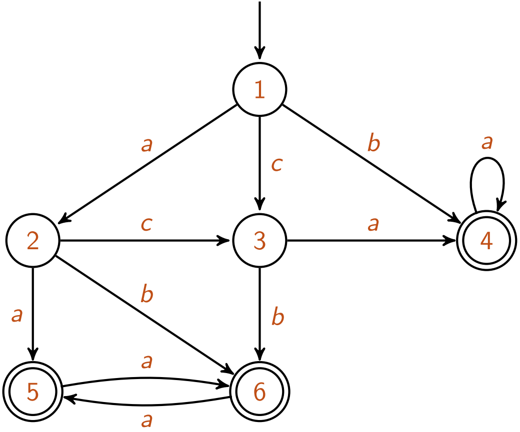


Algoritmus pro eliminaci nedosažitelných stavů DFA

Vstup: Deterministický konečný automat $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
Výstup: Ekvivalentní automat $\mathcal{M}'$ bez nedosažitelných stavů.

$i := 0$
$S_i := \{q_0\}$
repeat
    $S_{i+1} := S_i \cup \{q \mid \exists p \in S_i, a \in \Sigma : \delta(p, a) = q\}$
    $i := i + 1$
until $S_i = S_{i-1}$
$Q' := S_i$
$\mathcal{M}' := (Q', \Sigma, \delta|_{Q' \times \Sigma}, q_0, F \cap Q')$

Eliminace ekvivalentních stavů: Příklad



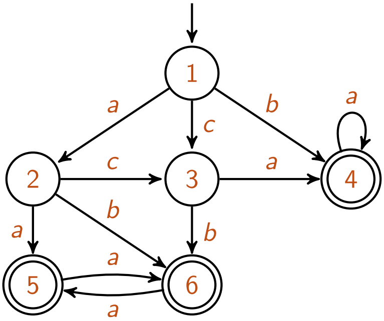
Eliminace ekvivalentních stavů

Nechť $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je DFA bez nedosažitelných stavů, jehož přechodová funkce je totální.

Definice 2.32.

Stavy p, q nazveme **jazykově ekvivalentní**, psáno $p \equiv q$, pokud

$$p \equiv q \iff \forall w \in \Sigma^* : (\hat{\delta}(p, w) \in F \iff \hat{\delta}(q, w) \in F).$$



$$p \equiv q \iff \forall w \in \Sigma^* : (\hat{\delta}(p, w) \in F \iff \hat{\delta}(q, w) \in F)$$

Definice 2.34.

Reduktem automatu $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ nazveme konečný automat $\mathcal{M}/_\equiv = (Q/_\equiv, \Sigma, \eta, [q_0], F/_\equiv)$, kde

- stavy jsou třídy rozkladu $Q/_\equiv$ (třída obsahující stav q je $[q]$),
- přechodová funkce η je funkce splňující

$$\forall p, q \in Q, \forall a \in \Sigma : \ \delta(q, a) = p \implies \eta([q], a) = [p],$$

- počáteční stav je třída rozkladu $Q/_\equiv$ obsahující stav q_0,
- koncové stavy jsou právě ty třídy rozkladu $Q/_\equiv$, které obsahují alespoň jeden koncový stav.

$$p \equiv q \iff \forall w \in \Sigma^* : (\hat{\delta}(p, w) \in F \iff \hat{\delta}(q, w) \in F)$$

Definice 2.34.

Reduktem automatu $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ nazveme konečný automat $\mathcal{M}/_\equiv = (Q/_\equiv, \Sigma, \eta, [q_0], F/_\equiv)$, kde

- stavy jsou třídy rozkladu $Q/_\equiv$ (třída obsahující stav q je $[q]$),
- přechodová funkce η je funkce splňující

$$\forall p, q \in Q, \forall a \in \Sigma : \ \delta(q, a) = p \implies \eta([q], a) = [p],$$

- počáteční stav je třída rozkladu $Q/_\equiv$ obsahující stav q_0,
- koncové stavy jsou právě ty třídy rozkladu $Q/_\equiv$, které obsahují alespoň jeden koncový stav.

Věta 2.37.

Nechť $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je DFA bez nedosažitelných stavů s totální přechodovou funkcí. Pak $L(\mathcal{M}/_\equiv) = L(\mathcal{M})$.

Důkaz. Indukcí $\hat{\eta}([q_0], u) = \hat{\eta}([q_0], v) \iff \hat{\delta}(q_0, u) \equiv \hat{\delta}(q_0, v)$. □

Algoritmus konstrukce minimálního automatu

Definice 2.38.

Pro každé $i \in \mathbb{N}_0$ definujeme binární relaci $\equiv_i$ na Q předpisem

$$p \equiv_i q \iff \forall w \in \Sigma^* : \big(|w| \leq i \implies (\hat{\delta}(p, w) \in F \iff \hat{\delta}(q, w) \in F)\big)$$

- $p \equiv_i q \iff p$ a q nelze „rozlišit“ žádným slovem délky $\leq i$
- $p \equiv q \iff p \equiv_i q$ pro každé $i \in \mathbb{N}_0$, tedy $\equiv \; = \bigcap_{i=0}^{\infty} \equiv_i$
- 1. $\equiv_0 \; = \{(p, q) \mid p \in F \iff q \in F\}$
  2. $\equiv_{i+1} = \{(p, q) \mid p \equiv_i q \;\wedge\; \forall a \in \Sigma : \delta(p, a) \equiv_i \delta(q, a)\}$

Algoritmus konstrukce minimálního automatu

Vstup: Deterministický konečný automat $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ bez nedosažitelných stavů a s totální přechodovou funkcí.
Výstup: Redukt $\mathcal{M}/_{\equiv}$.

$i := 0$
$\equiv_0 := \{(p, q) \mid p \in F \iff q \in F\}$
repeat
  $\equiv_{i+1} := \{(p, q) \mid p \equiv_i q \ \wedge\ \forall a \in \Sigma : \delta(p, a) \equiv_i \delta(q, a)\}$
  $i := i + 1$
until $\equiv_i = \equiv_{i-1}$
$\equiv := \equiv_i$
$\mathcal{M}/_{\equiv} := (Q/_{\equiv}, \Sigma, \eta, [q_0], F/_{\equiv})$

Minimalizace: Příklad

	$\mathcal{M}$	a	b
$\rightarrow$	1	2	$-$
	2	3	4
$\leftarrow$	3	6	5
	4	3	2
$\leftarrow$	5	6	3
$\leftarrow$	6	2	$-$
	7	6	1

	$\mathcal{M}'$	a	b
$\rightarrow$	1	2	N
	2	3	4
$\leftarrow$	3	6	5
	4	3	2
$\leftarrow$	5	6	3
$\leftarrow$	6	2	N
	N	N	N

	$\equiv_0$	a	b
I	1	I	I
	2	II	I
	4	II	I
	N	I	I
II	3	II	II
	5	II	II
	6	I	I

Minimalizace: Příklad

	$\equiv_1$	a	b
I	1	II	I
	N	I	I
II	2	III	II
	4	III	II
III	3	IV	III
	5	IV	III
IV	6	II	I

	$\equiv_2$	a	b
I	1	III	II
II	N	II	II
III	2	IV	III
	4	IV	III
IV	3	V	IV
	5	V	IV
V	6	III	II

	$\mathcal{M}/_{\equiv}$	a	b
$\rightarrow$	I	III	II
	II	II	II
	III	IV	III
$\leftarrow$	IV	V	IV
$\leftarrow$	V	III	II

Kanonický tvar konečných automatů: Motivace

	$\mathcal{M}_1$	a	c	b
	I	IV	III	I
$\rightarrow$	II	V	III	III
$\leftarrow$	III	II	I	I
$\leftarrow$	IV	V	I	II
	V	II	V	V

	$\mathcal{M}_2$	a	b	c
$\rightarrow$	I	III	V	V
	II	IV	II	V
	III	I	III	III
$\leftarrow$	IV	III	I	II
$\leftarrow$	V	I	II	II

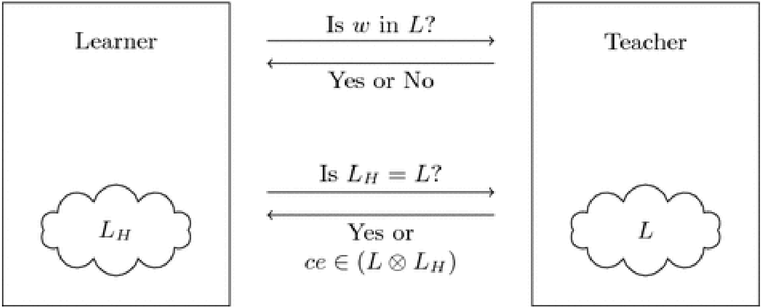
Kanonický tvar konečných automatů: Příklad

		a	c	b
	I	IV	III	I
$\rightarrow$	II	V	III	III
$\leftarrow$	III	II	I	I
$\leftarrow$	IV	V	I	II
	V	II	V	V

		a	b	c
$\rightarrow$	1			
	2			
	3			
	4			
	5			

* Automata learning

* Automata learning



* Angluin's L* Algorithm for DFA Learning

* Angluin's L* Algorithm for DFA Learning

L* LEARNER

$S, E \leftarrow \{\epsilon\}$
repeat
  while (S, E) is not closed or not consistent
  if (S, E) is not closed
    find $s_1 \in S$, $a \in A$ such that
      $row(s_1 a) \neq row(s)$, for all $s \in S$
    $S \leftarrow S \cup \{s_1 a\}$
  if (S, E) is not consistent
    find $s_1, s_2 \in S$, $a \in A$, and $e \in E$ such that
      $row(s_1) = row(s_2)$ and $\mathcal{L}(s_1 ae) \neq \mathcal{L}(s_2 ae)$
    $E \leftarrow E \cup \{ae\}$
  Make the conjecture $M(S, E)$
  if the Teacher replies **no**, with a counter-example t
    $S \leftarrow S \cup \texttt{prefixes}(t)$
until the Teacher replies **yes** to the conjecture $M(S, E)$.
return $M(S, E)$