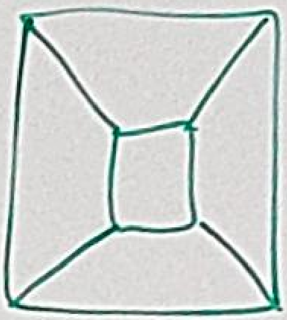
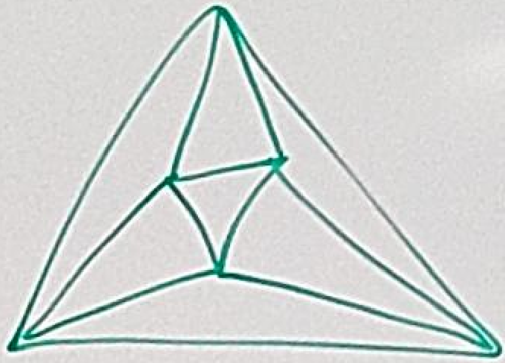
EULER – POINCARE (d-dim)

Nechť P je omezený polyedr a P má f^c stěn dimenze $c \in \{0, 1, \dots, d\}$. Pak

$$f^0 - f^1 + f^2 - \dots + (-1)^d f^d = 1.$$



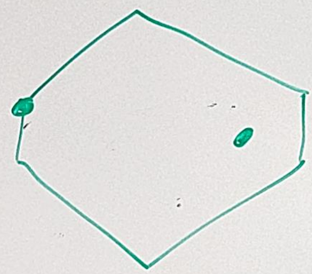


LEM: Nechť P je dim. $k+1$.

Pokud (E-P) platí pro $d = k-1$ a $d = k$, pak platí pro P.

- $\mathbb{R}^d$ d-dim. Eukl...
- nadrovina $H_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^d ; ax = b\}$

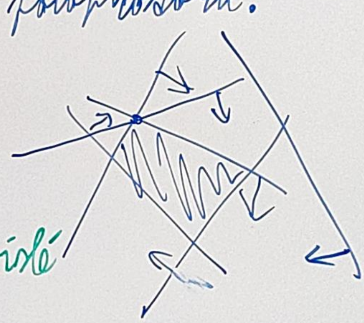
  poloprostor $H^+_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^d ; ax \geq b\}$ ... H^- $\leq b$
- X je konvexní $\iff \forall x,y \in X \ \forall \alpha \in (0,1) : \alpha x + (1-\alpha) y \in X$.



<u>Konvexní mnohostěn</u>

- polytop = konvexní obal kon. mnoha bodů v $\mathbb{R}^d$.
- $\boxed{\text{polyedr}}$ = průnik kon. mnoha poloprostorů. $H_1^+, H_2^+, \dots$

VĚTA: Omezený polyedr = polytop.



- Stěna dim. c v polyedru P je $X \subseteq P$ takové, že $X = P \cap H_{i_1} \cap H_{i_2} \cap \dots \cap H_{i_{d-c}}$, kde $H_{i_1} \dots H_{i_{d-c}}$ jsou nezávislé a $\dim(X) = c$.

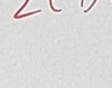
  / $c = -1 \sim \emptyset$, $c = 0 \sim$ vrcholy, $c = 1$ hrany, ... $c = d-1$ facety...

Důkaz: • $P \mapsto$ Schlegel diagram $R_0, R_1, R_2, \dots, R_a$, $a = f^k - 1$. • Zvolím obecný směr $\overleftrightarrow{p}$.

• $\forall F \subseteq R_i$ stěny dim. $c<k$: přiřadím 2 flagy ve směru $\vec{p}$ a $\overleftarrow{p}$ náboje $\frac{1}{2}(-1)^c$.

$$\sum_F \text{náboj z } F = \text{levá strana (E-P)} - \Big((-1)^k f^k + (-1)^{k+1} \underset{1}{\underset{\parallel}{f^{k+1}}}\Big).$$

CLAIM: $\forall F \subseteq R_i$ jeden z flagů určitě míří ven z R_i.



Pro $c = k-1 = \dim(F)$, druhý z flagů míří dovnitř R_i.

Pro $c \leq k-2 = \dim(F)$, druhý z flagů míří dovnitř R_i právě když F není stěnou rovnoběžného průmětu R_i ve směru $\overleftrightarrow{p}$.

• nechť S_i je průmětem R_i, nechť $f_i^c = \#$ stěn dim. c v R_i, $g_i^c = \#$ stěn d. c v S_i.

Sečteme flagy přes facety $R_1, \dots, R_a$, nejdříve pro R_i:

$$\frac{1}{2}(-1)^{k-1} f_i^{k-1} + \frac{1}{2}\sum_{c=0}^{k-2}(-1)^c\left(f_i^c - g_i^c\right) = \frac{1}{2}\sum_{c=0}^{k-1}(-1)^c f_i^c - \frac{1}{2}\sum_{c=0}^{k-2}(-1)^c g_i^c =$$

(EP) pro dim. k

dim $k-1$

$$= \frac{1}{2}\Big(1 - (-1)^k \underset{1}{\underset{\parallel}{f_i^k}}\Big) - \frac{1}{2}\Big(1 - (-1)^{k-1} \underset{1}{\underset{\parallel}{g_i^{k-1}}}\Big) = (-1)^{k-1}.$$

Pro R_0 máme součet flagů mířících ven:

$$\frac{1}{2}\underbrace{\sum_{c=0}^{k-1}(-1)^c f_0^c} + \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{c=0}^{k-2}(-1)^c g_0^c}_{(E\text{-}P)\ \text{pro dim}\ k,\ k-1} = \frac{1}{2}\left(1-(-1)^k \underset{\overset{\parallel}{1}}{f_0^k}\right) + \frac{1}{2}\left(1-(-1)^{k-1} \underset{\overset{\parallel}{1}}{g_0^{k-1}}\right) = 1.$$

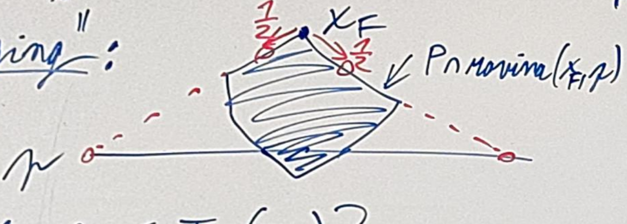
Celkem je suma flagů

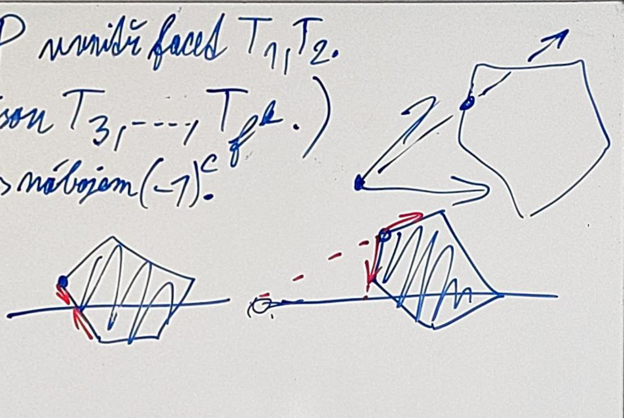
$$a\cdot(-1)^{k-1}+1 = (-1)^k(1-f^k)+1 \overset{\text{původní:}}{=} f^0 - f^1 + f^2 - \dots + (-1)^{k-1} f^{k-1}. \quad \square$$

Důkaz II: Zvolíme přímku p v ob. poloze protínající P uvnitř facet T_1, T_2.

(Zbytek facet jsou $T_3, \dots, T_{f^k}$.)

- $\forall F \subseteq T_i$ stěna dim. c zvolím vnitřní bod x_F s nábojem $(-1)^c$.
- "Discharging":





- Kolik náboje skončí v T_1 (T_2)?

$$\frac{1}{2}\left(f_1^0 - f_1^1 + f_1^2 - \dots + (-1)^k f_1^k\right) + \frac{1}{2}(-1)^k f_1^k = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(-1)^k$$

- Kolik náboje skončí v T_i, $i \geq 3$?

$$\frac{1}{2}(-1)^{k-1} f_i^{k-1} + \frac{1}{2}\sum_{c=0}^{k-2}(-1)^c\left(f_i^c - g_i^c\right) + (-1)^k = \frac{1}{2}\sum_{c=0}^{k-1}(-1)^c f_i^c - \frac{1}{2}\sum_{c=0}^{k-2}(-1)^c \cdot g_i^c \quad \left(+(-1)^k\right)$$

$$\overset{(E-P)}{=} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$\sum = 1 + (-1)^k = 1 - (-1)^{k+1} \quad \square$$