Algebra II – jaro 2019 – 3. termín

Všechna svoje tvrzení precizně zdůvodněte.

1. **(10 bodů)** Popište svaz podalgeber algebry $(\mathbb{N} \times \mathbb{Z}, f, g, \oplus)$, kde unární operace f a g a binární operace $\oplus$ jsou definované předpisy

$$\begin{aligned} f((a,b)) &= (a+1,b),\\ g((a,b)) &= (a,b+1),\\ (a,b)\oplus(c,d) &= (a,d). \end{aligned}$$

2. **(5 bodů)** Nechť A je množina všech podmnožin $B \subseteq \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ takových, že alespoň jedna z množin B a $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}) \setminus B$ je podalgebrou algebry $(\mathbb{Z}, \mathrm{succ})^2$. Rozhodněte, zda uspořádaná množina $(A, \subseteq)$ je svaz.

3. **(5 bodů)** Uvažujme uspořádanou množinu, jejímiž prvky jsou největší prvek $\top$, nejmenší prvek $\perp$ a všechny dvojice (A, a), kde $a \in A \subseteq \mathbb{R}$, přičemž $(A, a) \le (B, b)$ platí právě tehdy, když $A \subseteq B$ a $a \le b$. Rozhodněte, zda tato uspořádaná množina je úplný svaz.

4. **(5 bodů)** Uvažujme uspořádanou množinu $(\mathbb{N}\times\mathbb{N} \cup \{\top\}, \le)$, kde $\top$ je největší prvek a na $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ je uspořádání definováno lexikograficky, tj.

$$\forall k,\ell,m,n \in \mathbb{N}\colon \quad (k,\ell) \le (m,n) \quad\iff\quad k < m \text{ nebo } (k = m \ \&\ \ell \le n).$$

Rozhodněte, zda tato uspořádaná množina je algebraický svaz.

5. **(10 bodů)** Nechť A je množina všech reflexivních binárních relací na množině $\{a,b\}^*$ všech slov nad dvoupísmennou abecedou. Na A uvažujme tři unární operace f, g a k definované předpisy

$$\begin{aligned} f(\rho) &= \{\, (au, av) \mid (u,v) \in \rho \,\} \cup \mathrm{id}_{\{a,b\}^*},\\ g(\rho) &= \{\, (u,v) \in \{a,b\}^* \times \{a,b\}^* \mid (au, av) \in \rho \,\},\\ k(\rho) &= \{\, (u,v) \in \{a,b\}^* \times \{a,b\}^* \mid \exists\, w \in \{a,b\}^*\colon (u,w),(v,w) \in \rho \,\}. \end{aligned}$$

Rozhodněte, zda relace $\sim$ definovaná předpisem

$$\rho \sim \sigma \quad\iff\quad k(\rho) = k(\sigma)$$

je kongruencí algebry a) (A, f), b) (A, g).

6. **(10 bodů)** Uvažujme typ algeber sestávající ze dvou binárních operačních symbolů $\oplus$ a $\otimes$. Rozhodněte, která z následujících identit je splněna v algebře $\mathcal{A}$, jejíž nosnou množinou je množina

$$\{\, I(m,n) \mid m,n \in \mathbb{N},\ m \le n \,\} \cup \{\emptyset\},$$
$$\text{kde } I(m,n) = \{\, k \in \mathbb{N} \mid m \le k \le n \,\},$$

operace $\oplus^{\mathcal{A}}$ je průnik a operace $\otimes^{\mathcal{A}}$ je pro libovolná přirozená čísla m, n, p, q splňující $m \le n$ a $p \le q$ definována předpisy

$$\begin{aligned} \emptyset \otimes^{\mathcal{A}} \emptyset &= \emptyset,\\ I(m,n) \otimes^{\mathcal{A}} \emptyset = \emptyset \otimes^{\mathcal{A}} I(m,n) &= I(m,n),\\ I(m,n) \otimes^{\mathcal{A}} I(p,q) &= I(\min(m,p), \max(n,q)). \end{aligned}$$

a) $(x \otimes y) \oplus (z \otimes t) \oplus \big((x \oplus z) \otimes (y \oplus t)\big) = (x \oplus z) \otimes (y \oplus t)$,
b) $(x \otimes y) \oplus (x \otimes z) \oplus \big(x \otimes (y \oplus (x \otimes z))\big) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$.

7. **(15 bodů)** Rozhodněte, na které z operátorů H, S a P je uzavřená třída všech svazů L takových, že neexistují prvky $a_i \in L$ pro $i \in \mathbb{N}$ splňující současně následující podmínky:
1) $a_i > a_j$ pro všechna $i < j$, 2) $\inf\{\, a_i \mid i \in \mathbb{N} \,\}$ je nejmenším prvkem L.