# Algebra II – jaro 2022 – 3. termín

Všechna svoje tvrzení precizně zdůvodněte.

**1. (10 bodů)** Popište svaz podalgeber algebry $(\mathbb{Z}, *)$, kde $*$ je binární operace definovaná předpisem

$$a * b = \begin{cases} a+1, & \text{pokud } a = -b \text{ a současně } a \neq 0, \\ a-1, & \text{pokud } a \neq -b \text{ a současně } a \neq 0, \\ b, & \text{pokud } a = 0. \end{cases}$$

**2. (5 bodů)** Uvažujme množinu $L$, jejímiž prvky jsou právě podmnožiny množiny $\mathbb{N}_0$, jejichž žádný prvek není násobkem jiného. Na $L$ definujeme uspořádání předpisem

$$A \leq B \iff A = B \text{ nebo } \exists n \in B\, \forall m \in A\colon m \mid n.$$

Rozhodněte, zda uspořádaná množina $(L, \leq)$ je svaz.

**3. (5 bodů)** Uvažujme uspořádanou množinu, jejímiž prvky jsou největší prvek $\top$ a všechny posloupnosti přirozených čísel $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ takové, že pro všechna $i \in \mathbb{N}$ platí $|a_i - a_{i+1}| \leq 1$, přičemž $(a_i)_{i=1}^{\infty} \leq (b_i)_{i=1}^{\infty}$ platí právě tehdy, když pro všechna $i \in \mathbb{N}$ je splněno $a_i \leq b_i$. Rozhodněte, zda tato uspořádaná množina je úplný svaz.

**4. (5 bodů)** Uvažujme množinu $L$, jejímiž prvky jsou právě podmnožiny $U \subseteq \mathbb{R}^2$ takové, že platí alespoň jedna z následujících podmínek:
1) Všechny body množiny $U$ leží na jedné přímce.
2) Žádná trojice bodů množiny $U$ neleží na stejné přímce.
Rozhodněte, zda přidáním největšího prvku k uspořádané množině $(L, \subseteq)$ vznikne algebraický svaz.

**5. (10 bodů)** Uvažujme algebru $\mathcal{A} = (0\mathbb{N}^*, (f_a)_{a \in \mathbb{N}})$, jejímiž prvky jsou všechny konečné posloupnosti přirozených čísel začínající nulou a kde každá operace $f_a$ je unární a provádí přidání čísla $a$ na konec posloupnosti, tj. $f_a(v) = va$. (Až na izomorfismus je $\mathcal{A}$ algebra termů nad jednou proměnnou v jazyce spočetně mnoha unárních operačních symbolů.) Pro libovolnou posloupnost $v = a_0 a_1 \dots a_n$, kde $n \geq 0$, $a_0 = 0$ a $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$, označme pro každé $k \in \mathbb{Z}$ symbolem $d_k^-(v)$ počet indexů $i \in \{1, \dots, n\}$ takových, že $a_i - a_{i-1} = k$, a pro každé $k \in \mathbb{N}$ označme symbolem $d_k^+(v)$ počet indexů $i \in \{1, \dots, n\}$ takových, že $a_i + a_{i-1} = k$. Pro každý z následujících předpisů rozhodněte, zda definuje kongruenci algebry $\mathcal{A}$:

$$v \sim w \iff \forall k \in \mathbb{Z}\colon d_k^-(v) = d_k^-(w),$$
$$v \approx w \iff \forall k \in \mathbb{N}\colon d_k^+(v) = d_k^+(w).$$

**6. (10 bodů)** Uvažujme typ algeber sestávající z unárního operačního symbolu $f$ a binárního operačního symbolu $\bullet$. Buď $A$ množina všech izotonních zobrazení $\varphi\colon (\mathbb{N}, \leq) \to (\mathbb{N}, \leq)$, která nejsou omezená (tj. pro každé $m \in \mathbb{N}$ existuje $n \in \mathbb{N}$ splňující $\varphi(n) \geq m$). Pro každou z následujících identit rozhodněte, zda je splněna v algebře $\mathcal{A} = (A, f^{\mathcal{A}}, \bullet^{\mathcal{A}})$, jejíž operace jsou pro libovolné $\varphi, \psi \in A$ definovány předpisy $(f^{\mathcal{A}}(\varphi))(m) = \min\{\, n \in \mathbb{N} \mid \varphi(n) \geq m \,\}$ a $\varphi \bullet^{\mathcal{A}} \psi = \varphi \circ \psi$ ($\varphi$ po $\psi$).

a) $(x \bullet f(x)) \bullet x = x$ b) $f(x) \bullet x = f(y) \bullet y$

**7. (15 bodů)** Rozhodněte, na které z operátorů H, S a P je uzavřená třída všech svazů $\mathcal{L}$, které splňují následující podmínku:

Je-li $\mathcal{L}$ ohraničený, potom má každý jeho prvek nejvýše jeden komplement.