Algebra II – jaro 2024 – 1. termín

Všechna svoje tvrzení precizně zdůvodněte.

1. **(10 bodů)** Popište svaz podalgeber algebry $(\mathbb{N}, *)$ kladných celých čísel spolu s binární operací $*$ definovanou předpisem

$$a * b = \begin{cases} 2a, & \text{pokud } a \neq b \neq 1 \text{ a } (a \mid b \text{ nebo } b \mid a), \\ 1, & \text{pokud } a \nmid b \text{ a } b \nmid a, \\ a+1, & \text{pokud } b = 1, \\ b, & \text{pokud } a = b \neq 1. \end{cases}$$

2. **(5 bodů)** Uvažujme množinu L, jejímiž prvky jsou všechny relace ekvivalence $\sim$ na množině $\mathbb{N}$ takové, že všechny třídy rozkladu $\mathbb{N}$ podle $\sim$ mají stejnou mohutnost. Rozhodněte, zda uspořádaná množina $(L, \subseteq)$ je svaz.

3. **(5 bodů)** Na množině $\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ všech konečných podmnožin množiny přirozených čísel je definováno uspořádání $\leq$, kde $A \leq B$ platí právě tehdy, když existuje injektivní zobrazení $f\colon A \to B$ takové, že pro všechna $a \in A$ je splněno $a \leq f(a)$. Rozhodněte, zda přidáním největšího prvku k uspořádané množině $(\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N}), \leq)$ získáme úplný svaz.

4. **(5 bodů)** Uvažujme množinu $L \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$, jejímiž prvky jsou právě množiny kladných celých čísel $M \subseteq \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $a, b \in M$ platí podmínka $a+b \notin M$ a současně platí alespoň jedna z podmínek $a + 2b \notin M$ a $a + 6b \in M$. Rozhodněte, zda přidáním největšího prvku k uspořádané množině $(L, \subseteq)$ získáme algebraický svaz.

5. **(10 bodů)** Na množině $\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ uvažujme unární operace f, g a h dané pro libovolnou relaci $\rho \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ předpisy

$$f(\rho) = \rho^{-1}, \quad g(\rho) = \rho^{-1} \circ \rho, \quad h(\rho) = \{\, (2m, 2n) \mid (m, n) \in \rho \,\}.$$

Dále na množině $\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ uvažujme relaci ekvivalence $\sim$, kde $\rho \sim \sigma$ platí právě tehdy, když relace ρ a σ generují stejnou relaci ekvivalence na $\mathbb{N}$. Pro každou z následujících algeber rozhodněte, zda $\sim$ je její kongruencí:
a) $\mathcal{A} = (\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}), f, g)$
b) $\mathcal{B} = (\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}), \cup, h)$

6. **(10 bodů)** Uvažujme typ algeber sestávající z binárních operačních symbolů $\bullet$, $\odot$ a $\oslash$ a unárního operačního symbolu f. Pro každou z následujících identit rozhodněte, zda je splněna v algebře

$$\mathcal{A} = (\mathcal{P}(\{a, b\}^*), \bullet^{\mathcal{A}}, \odot^{\mathcal{A}}, \oslash^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}}),$$

jejíž operace jsou pro libovolné jazyky K a L nad abecedou $\{a, b\}$ definovány předpisy $K \bullet^{\mathcal{A}} L = K \cup L$, $K \odot^{\mathcal{A}} L = K \cdot L$, $K \oslash^{\mathcal{A}} L = \{\, v \in \{a, b\}^* \mid (\exists u \in K)(uv \in L) \,\}$ a $f^{\mathcal{A}}(L) = \{\, v^{\mathrm{R}} \mid v \in L \,\}$, kde v^{R} značí obrácení slova v, tj. $(c_1 \dots c_n)^{\mathrm{R}} = c_n \dots c_1$.
a) $x \oslash (x \bullet f(x)) = (x \oslash x) \bullet f(x \oslash x)$
b) $((x \oslash x) \oslash x) \bullet ((x \oslash x) \odot x) = x \oslash (x \odot x)$

7. **(15 bodů)** Rozhodněte, na které z operátorů H, S a P je uzavřená třída všech svazů L takových, že každé dva nesrovnatelné prvky $a, b \in L$ jsou pokryty svým supremem, tj. neexistuje prvek $c \in L$ splňující $a < c < a \vee b$.