Algebra II – jaro 2024 – 2. termín

Všechna svoje tvrzení precizně zdůvodněte.

1. **(10 bodů)** Popište svaz podalgeber algebry $(\mathbb{Z}, *)$, kde $*$ je binární operace definovaná předpisem

$$a * b = \begin{cases} a+1, & \text{pokud } a = b < 0, \\ -a, & \text{pokud } a < b \leq 0, \\ a-1, & \text{pokud } a \neq b \text{ a } a > 0, \\ b, & \text{jinak.} \end{cases}$$

2. **(5 bodů)** Uvažujme množinu L, jejímiž prvky jsou všechna uspořádání $\leq$ na množině $\mathbb{N}$ taková, že uspořádaná množina $(\mathbb{N}, \leq)$ je svaz. Rozhodněte, zda přidáním největšího a nejmenšího prvku k uspořádané množině $(L, \subseteq)$ získáme svaz.

3. **(5 bodů)** Uvažujme množinu $L \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$, jejímiž prvky jsou $\emptyset$ a všechny množiny $M_{a,b} = \{\, a + k \cdot b \mid k \in \mathbb{N}_0 \,\}$, kde a a b jsou libovolná kladná celá čísla. Rozhodněte, zda uspořádaná množina $(L, \subseteq)$ je úplný svaz.

4. **(5 bodů)** Uvažujme množinu L, jejímiž prvky jsou všechny relace ekvivalence $\sim$ na množině $\mathbb{N}$ takové, že tříd rozkladu $\mathbb{N}$ podle $\sim$ je nekonečně mnoho. Rozhodněte, zda přidáním největšího prvku k uspořádané množině $(L, \subseteq)$ získáme algebraický svaz.

5. **(10 bodů)** Pro libovolné slovo $w \in \{a, b\}^*$ označme
- $\mathrm{P}(w)$ nejdelší slovo $u \in \{a\}^* \cup \{b\}^*$ takové, že $w = uv$ pro nějaké $v \in \{a, b\}^*$,
- $\mathrm{S}(w)$ nejdelší slovo $u \in \{a\}^* \cup \{b\}^*$ takové, že $w = vu$ pro nějaké $v \in \{a, b\}^*$,
- $\mathrm{F}(w)$ největší n takové, že $w = uc^n v$ pro nějaké $c \in \{a, b\}$ a $u, v \in \{a, b\}^*$.

Pro každý z následujících předpisů rozhodněte, zda definuje kongruenci volného monoidu $(\{a, b\}^*, \cdot)$:

$$w \sim w' \quad\Longleftrightarrow\quad \mathrm{P}(w) = \mathrm{P}(w') \;\&\; \mathrm{S}(w) = \mathrm{S}(w') \;\&\; \mathrm{F}(w) = \mathrm{F}(w'),$$

$$w \approx w' \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} w \sim w', & \text{pokud } w, w' \notin \{a\}^* \cup \{b\}^*, \\ w = w', & \text{jinak.} \end{cases}$$

6. **(10 bodů)** Uvažujme typ algeber sestávající z unárních operačních symbolů f a g. Algebra

$$\mathcal{A} = (\mathcal{P}(\{a, b\}^* \times \{a, b\}^*), f^{\mathcal{A}}, g^{\mathcal{A}})$$

má operace pro libovolnou binární relaci ρ na $\{a, b\}^*$ definovány předpisy $f^{\mathcal{A}}(\rho) = \rho \circ \rho$ a $g^{\mathcal{A}}(\rho) = \{\, s \diamond t \mid s, t \in \rho \,\}$, přičemž $\diamond$ značí operaci na součinu volných monoidů $(\{a, b\}^*, \cdot) \times (\{a, b\}^*, \cdot)$. Pro každou z následujících podalgeber algebry $\mathcal{A}$ rozhodněte, zda je v ní splněna identita $f(g(x)) = g(f(x))$.

a) Podalgebra $\mathcal{B}$ obsahuje právě všechny podmnožiny identity na $\{a, b\}^*$.

b) Podalgebra $\mathcal{C}$ obsahuje právě všechny konečné relace na $\{a, b\}^*$.

7. **(15 bodů)** Rozhodněte, na které z operátorů H, S a P je uzavřená třída všech svazů takových, že buď jsou konečné, nebo každý jejich prvek náleží do nekonečného řetězce.