Algebra II – jaro 2024 – 3. termín

Všechna svoje tvrzení precizně zdůvodněte.

1. (10 bodů) Popište svaz podalgeber algebry $(\mathbb{Z}, *)$, kde $*$ je binární operace definovaná předpisem

$$a * b = \begin{cases} b - 1, & \text{pokud } a \neq b \neq 0, \\ b, & \text{jinak.} \end{cases}$$

2. (5 bodů) Uvažujme množinu L, jejímiž prvky jsou všechny podmnožiny $M \subseteq \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $a, b \in M$ splňující $a < b$ existuje $c \in M$ splňující $a < c < b$. Rozhodněte, zda uspořádaná množina $(L, \subseteq)$ je svaz.

3. (5 bodů) Uvažujme množinu L, jejímiž prvky jsou všechny relace ekvivalence $\sim$ na množině $\mathbb{N}$ takové, že rozklad $\mathbb{N}$ podle $\sim$ má právě jednu nekonečnou třídu a právě jednu jednoprvkovou třídu. Rozhodněte, zda přidáním největšího a nejmenšího prvku k uspořádané množině $(L, \subseteq)$ získáme úplný svaz.

4. (5 bodů) Uvažujme uspořádanou množinu $(L, \leq) = (\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq) \times (\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$ a její podmnožinu $M = \{ (A, B) \mid A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N}),\ A \cap B = \emptyset \}$. Rozhodněte, zda přidáním největšího prvku k uspořádané množině $(M, \leq)$ získáme algebraický svaz.

5. (10 bodů) Pro libovolné slovo $u \in \{a, b\}^*$ označme $|u|_a$ počet výskytů písmene a ve slově u (a analogicky pro b) a $\mathrm{D}(u) = |u|_a - |u|_b$. Dále pro slovo $w \in \{a, b\}^*$ označme

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(w) &= \{ \mathrm{D}(u) \mid u \text{ je prefix slova } w \} \text{ a} \\ \mathrm{C}(w) &= \{ (\mathrm{D}(u), \mathrm{D}(v)) \mid u, v \in \{a, b\}^* \text{ taková, že } uv = w \}. \end{aligned}$$

Pro každý z následujících předpisů rozhodněte, zda definuje kongruenci volného monoidu $(\{a, b\}^*, \cdot)$:

$$w \sim w' \iff \mathrm{P}(w) = \mathrm{P}(w'), \qquad\qquad w \approx w' \iff \mathrm{C}(w) = \mathrm{C}(w').$$

(Prefixem slova $w \in \{a, b\}^*$ rozumíme libovolné slovo $u \in \{a, b\}^*$ takové, že existuje slovo $v \in \{a, b\}^*$ splňující $uv = w$.)

6. (10 bodů) Uvažujme typ algeber sestávající z binárních operačních symbolů $\bullet$ a $\odot$ a unárních operačních symbolů f a g. Pro každou z následujících identit rozhodněte, zda je splněna v algebře

$$\mathcal{A} = (\mathcal{P}(\mathbb{N}), \bullet^{\mathcal{A}}, \odot^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}}, g^{\mathcal{A}}),$$

jejíž operace jsou pro libovolné množiny kladných celých čísel M a N definovány následovně:
$M \bullet^{\mathcal{A}} N = \{ \mathrm{nsn}(m, n) \mid m \in M,\ n \in N \}$,
$M \odot^{\mathcal{A}} N = \{ \mathrm{nsd}(m, n) \mid m \in M,\ n \in N \}$,
$f^{\mathcal{A}}(M)$ je nosič podalgebry algebry $(\mathbb{N}, \mathrm{nsn})$ generovaný podmnožinou M,
$g^{\mathcal{A}}(M)$ je nosič podalgebry algebry $(\mathbb{N}, \mathrm{nsd})$ generovaný podmnožinou M.
a) $(x \bullet x) \odot (x \bullet x) = (x \odot x) \bullet (x \odot x)$
b) $f(g(x)) = g(f(x))$

7. (15 bodů) Rozhodněte, na které z operátorů H, S a P je uzavřená třída všech svazů L, v nichž pro každý prvek $a \in L$ platí, že pokud množina $\{ b \in L \mid b < a \}$ obsahuje alespoň dva prvky, potom obsahuje nějaké dva nesrovnatelné prvky.