Algebra II – jaro 2024 – 4. termín

Všechna svoje tvrzení precizně zdůvodněte.

1. **(10 bodů)** Popište svaz podalgeber algebry $(\mathbb{Z}, *)$, kde $*$ je binární operace definovaná předpisem
$$a * b = \begin{cases} \mathrm{nsd}(a,b), & \text{pokud } 0 \le a < b, \\ -b, & \text{pokud } b < 0, \\ a + b, & \text{jinak.} \end{cases}$$

2. **(5 bodů)** Nechť M je množina neprázdných konečných svazů taková, že z každé třídy izomorfismu obsahuje právě jeden svaz. Pro libovolné svazy $K, L \in M$ položíme $K \preccurlyeq L$, jestliže existují prvky a a b ve svazu L takové, že $a \le b$ a svaz K je izomorfní intervalu $\langle a, b\rangle$ ve svazu L. Rozhodněte, zda uspořádaná množina $(M, \preccurlyeq)$ je svaz.

3. **(5 bodů)** Na množině L všech nekonečných posloupností $(a_i)_{i\ge 1}$, kde $a_1 = 0$ a $a_i \in \mathbb{Z}$ pro $i \ge 2$, je definováno uspořádání $\sqsubseteq$, kde $(a_i)_{i\ge1} \sqsubseteq (b_i)_{i\ge1}$ platí právě tehdy, když je posloupnost $(b_i - a_i)_{i\ge1}$ neklesající, tj. pro všechna $i \in \mathbb{N}$ platí $b_i - a_i \le b_{i+1} - a_{i+1}$. Rozhodněte, zda přidáním největšího a nejmenšího prvku k uspořádané množině $(L, \sqsubseteq)$ získáme úplný svaz.

4. **(5 bodů)** Uvažujme uspořádanou množinu $(\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}), \le)$, kde
$$(A, B) \le (C, D) \quad\Longleftrightarrow\quad \exists E \subseteq \mathbb{N}\colon A = C \cap E \;\&\; B = D \cap E.$$
Rozhodněte, zda přidáním největšího prvku k této uspořádané množině získáme algebraický svaz.

5. **(10 bodů)** Na množině M všech neprázdných konečných množin kladných celých čísel uvažujme relaci ekvivalence $\sim$, kde $A \sim B$ platí právě tehdy, když $\mathrm{nsd}(A) = \mathrm{nsd}(B)$. Pro každou z algeber $(M, f, +)$ a $(M, \cup, \star)$ rozhodněte, zda $\sim$ je její kongruencí, přičemž pro všechna $A, B \in M$ je definováno $f(A) = \{\, a^2 \mid a \in A \,\}$, $A + B = \{\, a + b \mid a \in A,\ b \in B \,\}$ a $A \star B = \{\, \mathrm{nsn}(a, b) \mid a \in A,\ b \in B \,\}$.

6. **(10 bodů)** Uvažujme typ algeber sestávající z binárních operačních symbolů $\bullet$ a $\sqcup$ a unárních operačních symbolů f, p a s. Pro každou z následujících identit rozhodněte, zda je splněna v algebře
$$\mathcal{A} = (\mathcal{P}(\{a,b\}^+), \bullet^{\mathcal{A}}, \sqcup^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}}, p^{\mathcal{A}}, s^{\mathcal{A}}),$$
jejíž operace jsou pro libovolné jazyky neprázdných slov $K, L \subseteq \{a,b\}^+$ definovány předpisy
$K \bullet^{\mathcal{A}} L = \{\, uv \mid u \in K,\ v \in L \,\}$, $K \sqcup^{\mathcal{A}} L = K \cup L$,
$f^{\mathcal{A}}(L) = \{\, w \in \{a,b\}^+ \mid \forall t \in L\ \exists\, u, v \in \{a,b\}^*\colon uwv = t \,\}$,
$p^{\mathcal{A}}(L) = \{\, w \in \{a,b\}^+ \mid \forall t \in L\ \exists\, v \in \{a,b\}^*\colon wv = t \,\}$,
$s^{\mathcal{A}}(L) = \{\, w \in \{a,b\}^+ \mid \forall t \in L\ \exists\, u \in \{a,b\}^*\colon uw = t \,\}$.

   a) $f(x \bullet y) = (f(x) \sqcup f(y)) \sqcup (s(x) \bullet p(y))$ b) $f^2(x) = f^4(x)$

7. **(15 bodů)** Rozhodněte, na které z operátorů H, S a P je uzavřená třída všech svazů L, v nichž pro všechny prvky $a, b, c \in L$ splňující $a < b < c$ existuje prvek $d \in L \setminus \{b\}$ splňující $a < d < c$.