

## 1. cvičení z MB141, jaro 2023

Toto je maximalistický plán, celý se nedá stihnout. Ve skupině 02 jsme zvládli úlohy 1, 2, 3, 4, 6. Vzorce z příkladu 3 většina studentů nezná. Pro počítání příkladu 6 je dobré připomenout, jak se počítá s mocninami.

**Příklad 1.** Jak poznáme, že je celé číslo dělitelné 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11? Svá tvrzení zdůvodněte.

**Příklad 2.** Ukažte, že součin pěti po sobě jdoucích čísel je dělitelný 120.

**Příklad 3.** Nejdříve pro  $n = 2, 3$  a potom pro další  $n \in \mathbb{N}$  si připomeňte

- vzorec pro součet  $n$ -tých mocnin dvou čísel,
- vzorec pro rozdíl  $n$ -tých mocnin dvou čísel,
- vzorec pro  $n$ -tou mocninu součtu, tzv. binomický vzorec.

**Příklad 4.** Za pomoci předchozího příkladu, ukažte, že pro každé  $n \in \mathbb{N}$

- číslo 3 dělí číslo  $4^n - 1$ ,
- číslo 5 dělí číslo  $n^5 - n$
- číslo 5 dělí číslo  $3^{3n+1} + 2^{n+1}$ .

**Příklad 5.** Dokažte, že pro libovolná celá čísla  $a$  platí:

- $a^2$  má po dělení 4 zbytek 0 nebo 1.
- $a^2$  má po dělení 8 zbytek 0, 1 nebo 4.
- $a^4$  má po dělení 16 zbytek 0 nebo 1.

**Příklad 6.** Jaké jsou poslední dvě cifry čísel:  $7^{14}$ ,  $3^{59}$ ?

**Příklad 7.** Najděte největšího společného dělitele čísel

- 227, 133,
- 3441, 2665.

**Příklad 8.** Nalezněte celá čísla  $x$  a  $y$  tak, aby  $883x + 487y = d$  byl největší společný dělitel čísel 883 a 487. Spočítejte  $x$  a  $y$  i pro dvojice čísel z předchozího příkladu.

**Příklad 9.** Najděte všechna přirozená  $n$  taková, že  $n - 1 \mid n^3 + 1$ .

**Příklad 10.** Dokažte, že pro přirozená čísla  $a$ ,  $k$  a  $n$  platí: jestliže  $k \mid n$ , pak  $a^k - 1 \mid a^n - 1$ . Pomocí toho dokažte: Je-li  $2^n - 1$  prvočíslo, pak  $n$  musí být také prvočíslo. Proto se "největší" prvočísla hledají ve tvaru  $2^p - 1$ , kde  $p$  je prvočíslo.

**Příklad 11.** Dokažte, že  $25 \mid 4^{2n+1} - 10n - 4$ .