MB141 – 7. cvičení
Afinní geometrie

Martin Čadek

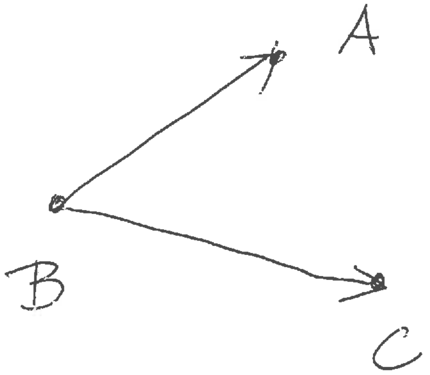
Jarní semestr 2020

A

Příklad 1. Napište nejdříve parametrický a potom implicitní popis nejmenšího afinního podprostoru v $\mathcal{A}_4$, který obsahuje body

$$A = [5,2,1,0], \quad B = [4,1,0,0], \quad C = [-3,1,0,1].$$

Parametrické vyjádření afinního podprostoru bude



$$\mathcal{M}: \ B + p\cdot\overrightarrow{BA} + q\cdot\overrightarrow{BC} =$$

$$= [4,1,0,0] + p(1,1,1,0) + q(-7,0,0,1)$$

Jeho zaměření je lineární obal

$$Z(\mathcal{M}) = [(1,1,1,0),(-7,0,0,1)]$$

Napišme nejdříve homogenní soustavu rovnic popisující zaměření $Z(\mathcal{M})$. Řádek hledané matice vypadá takto $(a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4)$ a musí platit, že

$$(a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4)\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} = 0 \qquad (a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4)\begin{pmatrix}-7\\0\\0\\1\end{pmatrix} = 0$$

B

Příklad 1. Napište nejdříve parametrický a potom implicitní popis nejmenšího afinního podprostoru v $\mathcal{A}_4$, který obsahuje body

$$A = [5, 2, 1, 0], \quad B = [4, 1, 0, 0], \quad C = [-3, 1, 0, 1].$$

Pro a_1, a_2, a_3, a_4 máme tedy 2 homogenní rovnice.

Matice soustavy je $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Volme $a_4 = 7s$, $a_3 = t$.

Dostaneme $a_1 = s$, $a_2 = -s-t$. Tedy $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (s, -s-t, t, 7s)$

Množina všech řešení je generována vektory

$(1, -1, 0, 7)$ a $(0, -1, 1, 0)$

Matici pro naši soustavu tedy vezmeme

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Rovnice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

popisuje zaměření $Z(\mathcal{M})$. Rovnice pro $\mathcal{M}$ bude mít stejnou matici. Pravou stranu dostaneme tak, že vynásobíme matici souřadnicemi bodu $B \in \mathcal{M}$. Tedy

C

Příklad 1. Napište nejdříve parametrický a potom implicitní popis nejmenšího afinního podprostoru v $\mathcal{A}_4$, který obsahuje body

$$A = [5, 2, 1, 0], \quad B = [4, 1, 0, 0], \quad C = [-3, 1, 0, 1].$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Soustava rovnic popisující rovinu M je

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Zkouška: Přesvědčíme se, že rovnice jsou splněny i pro souřadnice bodů A a C.

Příklad 2. Najděte průnik a spojení afinním podprostorů $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ v $\mathcal{A}_5$:

$$\mathcal{M} : [2,3,4,3,6] + a(1,1,1,-1,1) + b(0,0,1,0,1)$$
$$\mathcal{N} : [2,2,4,4,6] + c(1,0,0,0,1) + d(0,0,1,0,0) + e(2,1,1,-1,1).$$

A

V průniku leží body

$$X = [2,3,4,3,6] + a(1,1,1,-1,1) + b(0,0,1,0,1)$$
$$= [2,2,4,4,6] + c(1,0,0,0,1) + d(0,0,1,0,0) + e(2,1,1,-1,1)$$

To vede na soustavu

$$a\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix} - c\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix} - d\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix} - e\begin{pmatrix}2\\1\\1\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2-2\\2-3\\4-4\\4-3\\6-6\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

Příklad 2. Najděte průnik a spojení afinním podprostorů $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ v $\mathcal{A}_5$:

$$\mathcal{M} : [2,3,4,3,6] + a(1,1,1,-1,1) + b(0,0,1,0,1)$$

$$\mathcal{N} : [2,2,4,4,6] + c(1,0,0,0,1) + d(0,0,1,0,0) + e(2,1,1,-1,1).$$

B

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

Řešení je $(a,b,c,d,e) = (t-1, -t, -1-t, -1-t, t)$

Průnik $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \{ \underset{B}{[2,2,4,4,6]} - (1+t)\underset{v_1}{(1,0,0,0,1)} - (1+t)\underset{v_2}{(0,0,1,0,0)}$

$+ t\underset{v_3}{(2,1,1,-1,1)} \} = \{ B - v_1 - v_2 + t(v_3 - v_1 - v_2) \}$

Spočítáme a dostaneme

$\mathcal{M} \cap \mathcal{N} : [1,2,3,4,5] + t(1,1,0,-1,0)$, $\underline{\dim \mathcal{M} \cap \mathcal{N} = 1}$

Příklad 2. Najděte průnik a spojení afinním podprostorů $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ v $\mathcal{A}_5$:

C

$$\mathcal{M} : \overset{A}{[2,3,4,3,6]} + a\overset{u_1}{(1,1,1,-1,1)} + b\overset{u_2}{(0,0,1,0,1)}$$

$$\mathcal{N} : \underset{B}{[2,2,4,4,6]} + c\underset{v_1}{(1,0,0,0,1)} + d\underset{v_2}{(0,0,1,0,0)} + e\underset{v_3}{(2,1,1,-1,1)}.$$

Spojení podprostorů $\mathcal{M} \sqcup \mathcal{N}$ má zaměření generované vektory $u_1, u_2, v_1, v_2, v_3, B-A$. Z nich vybereme lineárně nezávislé se stejným lineárním obalem. Nový výpočet není třeba provádět, stačí se vrátit k matici předchozí soustavy, která má sloupce

$$(u_1, u_2, -v_1, -v_2, -v_3 \mid B-A)$$

Z ní zjistíme, že lin. nezávislé jsou vektory u_1, u_2, v_1, v_2. Proto

$$\mathcal{M} \sqcup \mathcal{N} : \quad A + a u_1 + b u_2 + c v_1 + d v_2.$$

$$\dim \mathcal{M} \sqcup \mathcal{N} = 4.$$

Příklad 3. V $\mathcal{A}_4$ určete vzájemnou polohu rovin

A

$$\pi : 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 5, \quad 5x_1 - x_2 + 2x_4 = 3,$$

$$\rho : x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -3, \quad 2x_2 - x_3 + x_4 = -2.$$

Nejdříve zjistíme, jak vypadá průnik $\pi \cap \rho$. Průnik je popsán soustavou rovnic, která vznikla spojením obou soustav.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 2 & 0 & 5 \\ 5 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & -4 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & -4 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -14 & 14 & 0 & 14 \\ 0 & -26 & 20 & 2 & 18 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & -4 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -13 & 10 & 1 & 9 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & -4 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & -4 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -4 \end{array}\right)$$

Příklad 3. V $\mathcal{A}_4$ určete vzájemnou polohu rovin

B

$$\pi: 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 5, \quad 5x_1 - x_2 + 2x_4 = 3,$$
$$\rho: x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -3, \quad 2x_2 - x_3 + x_4 = -2.$$

Vidíme, že soustava je jednoznačně řešitelná, průnikem je bod. Mohli bychom ho spočítat, ale zajímá nás vzájemná poloha a k ní nepotřebujeme vědět, který bod je v průniku. Stačí, že průnik je jednobodový.

Ze skutečnosti, že $\pi \cap \rho = \{A\}$, plyne, že $Z(\pi) \cap Z(\rho) = \{\vec{o}\}$. Kdyby $\vec{o} \neq \vec{v} \in Z(\pi) \cap Z(\rho)$, pak by v průniku $\pi \cap \rho$ ležela přímka $A + tv$, ale to není pravda. Tedy $Z(\pi) \not\subseteq Z(\rho)$ ani $Z(\rho) \not\subseteq Z(\pi)$. Proto jsou roviny π a ρ <u>různoběžné</u>.

A

Příklad 4. V $\mathcal{A}_4$ určete vzájemnou polohu roviny

$$\rho: \ [3,-1,0,0] + s(-1,1,1,0) + t(2,1,0,1)$$

a přímek p, q a r, které mají parametrická vyjádření

a) $p: [7,4,2,3] + a(5,-2,-3,1)$,
b) $q: [1,2,3,4] + b(1,5,3,2)$,
c) $r: [1,2,3,4] + c(1,1,1,1)$.

Píšme $\rho: \ R + s u_1 + t u_2$, $p: \ A + a(5,-2,-3,1) = A + a v$

Počítáme $\rho \cap p$: $R + s u_1 + t u_2 = A + a v$,

$s u_1 + t u_2 - a v = A - R$ dává soustavu

$$\begin{array}{ccc} s & t & a \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -5 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Vidíme, že řešení závisí na jednom parametru, tedy $\dim(\rho \cap p) = 1$, což znamená, že $\underline{\underline{p \subseteq \rho}}$.

B

Příklad 4. V $\mathcal{A}_4$ určete vzájemnou polohu roviny

$$\rho: \ [3,-1,0,0] + s(-1,1,1,0) + t(2,1,0,1)$$

a přímek p, q a r, které mají parametrická vyjádření

a) $p: [7,4,2,3] + a(5,-2,-3,1)$,
b) $q: [1,2,3,4] + b(1,5,3,2)$,
c) $r: [1,2,3,4] + c(1,1,1,1)$.

Pišme $q: B + bw$. Počítáme $\rho \cap q$, což vede na rovnici $R + su_1 + tu_2 = B + bw$. Dostáváme soustavu s maticí

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -5 & 3 \\ 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Soustava nemá řešení, tedy $\rho \cap \pi = \emptyset$.

Spočítáme $Z(\rho) \cap Z(q)$. To vede na rovnici

$$su_1 + tu_2 = bw$$

Příklad 4. V $\mathcal{A}_4$ určete vzájemnou polohu roviny C

$$\rho: \ [3,-1,0,0] + s(-1,1,1,0) + t(2,1,0,1)$$

a přímek p, q a r, které mají parametrická vyjádření

a) $p: [7,4,2,3] + a(5,-2,-3,1)$,
b) $q: [1,2,3,4] + b(1,5,3,2)$,
c) $r: [1,2,3,4] + c(1,1,1,1)$.

Matice homogenní soustavy je

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{stejně jako v předchozím} \sim \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Řešení závisejí na jednom parametru, tedy $\dim Z(\rho) \cap Z(q) = 1$. Proto musí být $Z(q) \subseteq Z(\rho)$ ($\dim Z(q) = 1$, $\dim Z(\rho) = 2$).

Tedy <u>q je rovnoběžná s rovinou ρ.</u>

Příklad 4. V $\mathcal{A}_4$ určete vzájemnou polohu roviny D

$$\rho: \ [3,-1,0,0] + s(-1,1,1,0) + t(2,1,0,1)$$

a přímek p, q a r, které mají parametrická vyjádření

a) $p: [7,4,2,3] + a(5,-2,-3,1)$,
b) $q: [1,2,3,4] + b(1,5,3,2)$,
c) $r: [1,2,3,4] + c(1,1,1,1)$.

Píšeme $r: C + c r$. Řešíme $\rho \cap r$, což vede na rovnici $R + s u_1 + t u_2 = C + c r$ s maticí

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{array}\right)$$

Vidíme, že soustava nemá řešení, tedy $r \cap \rho = \emptyset$. Soustava pro výpočet $Z(r) \cap Z(\rho)$ má právě jedno řešení. Tedy musí být $Z(r) \cap Z(\rho) = \{\vec{o}\}$. Proto $Z(r) \not\subseteq Z(\rho)$ a přímka r a rovina ρ jsou mimoběžné.

A

Příklad 5. Osa dvou mimoběžných přímek p a q v afinním prostoru $\mathcal{A}_3$ je přímka, která obě přímky protíná a je na ně kolmá. Najděte osu mimoběžek

$$p: \ [1,2,3] + a(1,2,-1), \qquad q: \ [2,-3,4] + b(2,-1,-2)$$

a body $P \in p$ a $Q \in q$, ve kterých tyto přímky protíná.

Pišme $p: A + a\vec{u}$, $q: B + b\vec{v}$.
Prvně najdeme směrový vektor osové přímky r.
Označme jej $\vec{w} = (x_1, x_2, x_3)$. Platí $\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle = 0$
a $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$. Dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

Tedy vektory kolmé k $\vec{u}$ a $\vec{v}$ jsou násobky vektoru $\vec{w} = (1, 0, 1)$. Protože $p \cap r$ je neprázdný, určují přímky p a hledaná přímka r rovinu ρ, která má parametrický popis $\rho: A + a\vec{u} + c\vec{w}$.

B

Příklad 5. Osa dvou mimoběžných přímek p a q v afinním prostoru $\mathcal{A}_3$ je přímka, která obě přímky protíná a je na ně kolmá. Najděte osu mimoběžek

$$p: \ [1,2,3] + a(1,2,-1), \qquad q: \ [2,-3,4] + b(2,-1,-2)$$

a body $P \in p$ a $Q \in q$, ve kterých tyto přímky protíná.

Průnik $r \cap q \subseteq p \cap q$. Proto spočteme $p \cap q$

$$A + a\vec{u} + c\vec{w} = B + b\vec{v}$$

$$a\vec{u} + c\vec{w} - b\vec{v} = B - A$$

je soustava rovnic s neznámými a, c, b s maticí

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} a & \;c & \;\;b & \;\; \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -5 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 5 & -7 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} b = -1 \\ c = 1 \\ a = -2 \end{array}$$

Průnik $p \cap q = \{Q\}$, kde $Q = B + b v = [2,-3,4] - (2,-1,-2)$

$$\underline{Q = [0,-2,6]}$$

Protože $r \cap q \neq \emptyset$, leží bod Q rovněž na přímce r.

C

Příklad 5. Osa dvou mimoběžných přímek p a q v afinním prostoru $\mathcal{A}_3$ je přímka, která obě přímky protíná a je na ně kolmá. Najděte osu mimoběžek

$$p: \ [1,2,3] + a(1,2,-1), \qquad q: \ [2,-3,4] + b(2,-1,-2)$$

a body $P \in p$ a $Q \in q$, ve kterých tyto přímky protíná.

Bod $P = p \cap r$ je $P = A + a\vec{u} = [1,2,3] - 2(1,2,-1)$

$$\underline{P = [-1,-2,5]}$$

Přímka r, osa přímek p a q má parametrickou rovnici

$$\underline{r: \ P + t w = [-1,-2,5] + t(1,0,1).}$$

Zkouška: $Q - P = [0,-2,6] - [-1,-2,5] = (1,0,1)$