

## 10. cvičení z MB141, jaro 2023

**Příklad 1.** Zopakujte definici skalárního součinu v  $\mathbb{R}^2$  a v  $\mathbb{R}^3$ . V  $\mathbb{R}^3$  spočítejte velikosti a vzájemnou odchylku vektorů  $u = (2, 2, -1)$  a  $v = (-2, 0, 2)$ .

**Příklad 2.** V  $\mathbb{R}^3$  najděte ortogonální doplněk podprostoru

$$M = [(1, 2, -1), (1, -2, 5)].$$

*Řešení.*  $M^\perp = [(-4, 3, 2)]$  □

**Příklad 3.** Spočítejte kolmou projekci vektoru  $u = (7, -16, 9)$  do podprostoru  $M$  a jeho ortogonálního doplněku  $M^\perp$  z předchozího příkladu.

*Řešení.*  $P_M(u) = (-1, -10, 13)$ ,  $P_{M^\perp}(u) = (8, -6, -4)$ . □

**Příklad 4.** Necht'  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  je kolmá projekce na rovinu

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0.$$

Najděte matici  $A$  tvaru  $3 \times 3$  takovou, že v souřadnicích standardní báze je

$$\varphi(x) = Ax = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

*Řešení.*  $A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 8 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$  □

**Příklad 5.** V  $\mathcal{E}_3$  spočítejte vzdálenost bodu  $A = [5, 7, 1]$  od roviny

$$\rho : x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4 = 0.$$

Současně najděte bod  $C \in \rho$  takový, že  $\text{dist}(A, C) = \text{dist}(A, \rho)$ .

*Řešení.*  $\text{dist}(A, \rho) = \sqrt{56}$ ,  $C = [3, 1, 5]$ . □

**Příklad 6.** V  $\mathcal{E}_3$  spočítejte vzdálenost přímek

$$p : [4, 4, 4] + a(2, 1, -1) \quad \text{a} \quad q : [1, 15, 12] + b(1, -2, 1).$$

Dále najděte body  $K \in p$  a  $L \in q$ , v nichž se vzdálenost přímek realizuje, tj. platí  $\text{dist}(K, L) = \text{dist}(p, q)$ .

*Řešení.*  $\text{dist}(p, q) = 2$ ,  $K = [2, 3, 5]$ ,  $L = [4, 9, 15]$ . □

**Příklad 7.** V  $\mathcal{E}_3$  určete odchylku roviny  $\rho$  od přímky  $p$ :

$$\rho : [1, 3, 5] + a(1, 1, 1) + b(1, 3, 2), \quad p : [-3, 1, 7] + c(1, 0, -1).$$

*Řešení.* Odchylka normály roviny od vektoru  $(1, 0, -1)$  je  $\pi/6$ , proto je odchylka od roviny rovna  $\pi/3$ . □

**Příklad. 8.** V  $\mathcal{E}_3$  určete odchylku rovin  $\rho$  a  $\sigma$ :

$$\rho : [2, 3, 4] + a(2, 2, 1) + b(3, 3, -2), \quad \sigma : x_1 - 2x_2 + x_3 = 4.$$

*Řešení.* Odchylka je  $\pi/6$ . Počítejte přes odchylku normál.

□