Lineární modely MB141, 1. část

David Kruml

21. 2. 2024

Osnova předmětu I

1. Algebra (4 týdny)
   - Komplexní čísla $\mathbb{C}$: operace, algebraický a goniometrický tvar, Moivreova věta.
   - Dělitelnost, zbytkové třídy $\mathbb{Z}_n$, Eukleidův algoritmus, Bezoutova věta, inverzní prvky.
   - Polynomy: kořeny, Hornerovo schéma.
   - Maticový počet, soustavy lineárních rovnic, Gaussova eliminace, inverzní matice, ukázky využití.
   - Vektorový prostor, nezávislost vektorů, hodnost matice, báze, podprostory.
   - Determinant matice, Cauchyova věta, Laplaceův rozvoj.
2. Geometrie (4 týdny)
   - Lineární zobrazení: matice zobrazení, vlastní čísla a vlastní vektory, změna báze, důležité příklady (symetrie, projekce).
   - Afinní geometrie: generování podprostorů, vzájemná poloha.
   - Skalární součin, velikost vektoru, vzdálenosti a odchylky podoprostorů v $\mathbb{R}^3$.
   - Obsah a objem, viditelnost.

Osnova předmětu II

3. Teorie čísel (2 týdny)
   - Velké mocniny v $\mathbb{Z}_n$.
   - Rozklad modulu, soustavy kongruencí, čínská zbytková věta.
   - Aplikace v šifrování: RSA, ElGamal.
4. Aplikace (2 týdny)
   - Lineární modely: rekurentní posloupnosti, Leslieho model růstu, Markovovy procesy.
   - Lineární optimalizace: úloha lineárního programování a její formulace, grafické řešení, simplexový algoritmus.

$$\begin{tikzcd}
\text{1. Algebra} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & \text{2. Geometrie} \arrow[d] \\
\text{3. Teorie čísel} & \text{4. Aplikace}
\end{tikzcd}$$

Zdroje

- M. Bulant, M. Panák, J. Slovák, Matematika drsně a svižně (2013).
- `math.muni.cz/~cadek`, `math.muni.cz/~klima`
- Materiály ze starších běhů.

Povinnosti, hodnocení, doporučení

- **Absolvovat 9 cvičení.**
- Odpovědníky jsou nepovinné, využijte k procvičování.
- Hodnocení vychází z písemné zkoušky na konci semestru, vnitrosemestrální testy nejsou.
- (Přibližné/předběžné) známkování: A. . . 80%, B. . . 70%, C. . . 60%, D. . . 50%, E. . . 40%.
- Samostatný list pro každý okruh za 5 bodů, 2–3 testové otázky po 1 bodu (včetně teoretických) a početní příklad za zbytek bodů.
- Choďte do školy, připravujte se na cvičení, studujte průběžně.
- Nespecializujte se jen na některé okruhy, „E-studium“ je riskantní a škodlivá strategie (navazující předměty, státnice).
- Předmět není (jen) o řešení typových úloh. Cílem je pochopit základních principů a postupů a získat schopnost „poradit si s čímkoli“ (obrácení otázky, kombinace postupů, umění zvolit účinnou metodu).
- Jsme tu s cvičícími pro vás.

Algebraický tvar komplexního čísla

Rozšiřování číselných oborů — obvykle chceme rozšířit některou omezenou vlastnost:

$$\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$$

Komplexní čísla si obvykle představujeme v *algebraickém tvaru*

$$z = a + bi.$$

Reálné konstanty $0, 1$ se chovají „normálně“.

i ... *imaginární jednotka*, $i^2 = -1$.

a ... *reálná část*, $a = \operatorname{Re} z$.

b ... *imaginární část*, $b = \operatorname{Im} z$.

Operace s komplexními čísly

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$

$$(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

$$-(a+bi)=-a-bi$$

$$\frac{1}{a+bi}=\frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}=\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{-b}{a^2+b^2}i$$

(pro $a^2+b^2\neq 0$)

Číslo $a-bi$ se nazývá *komplexně sdružené* k $a+bi$. Jejich součin a^2+b^2 je vždy reálný a nezáporný.

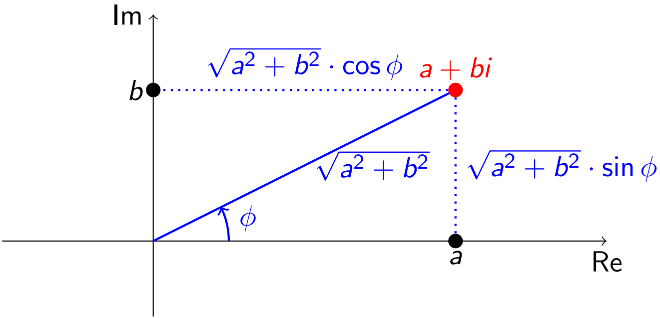
Příklady na komplexní čísla I

Upravte na algebraický tvar:

(1) $(2-3i)(-1+2i) = -2+4i+3i-6i^2 = (-2+6)+i(4+3) =$
$= 4+7i$

(2) $\frac{2-3i}{-1+2i} = \frac{(2-3i)(-1-2i)}{(-1+2i)(-1-2i)} = \frac{-8-i}{5}$

Gaussova rovina



$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ . . . *absolutní hodnota*,

ϕ . . . *argument*.

Pokud $|z| = 1$, nazýváme z *komplexní jednotkou*. Všechny komplexní jednotky tvoří *jednotkovou kružnici* se středem v 0.

Goniometrický tvar, Moivreova věta

$$z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi)$$

Podle konvence volíme $\phi \in [0, 2\pi)$. $|z|, \phi$ jsou *polární* souřadnice.

Na sčítání se tolik nehodí, násobení je zajímavější:

$$z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi), \qquad w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi),$$

$$\begin{aligned} z \cdot w &= |z| \cdot |w|((\cos\phi\cos\psi - \sin\phi\sin\psi) + i(\cos\phi\sin\psi + \sin\phi\cos\psi)) \\ &= |z| \cdot |w|(\cos(\phi+\psi) + i\sin(\phi+\psi)) \end{aligned}$$

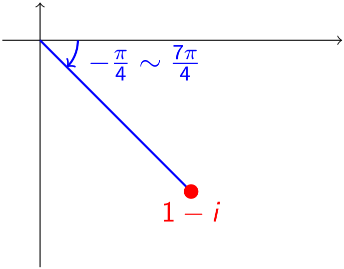
(Součin absolutních hodnot, součet argumentů.)

Moivreova věta:

$$z^n = |z|^n(\cos n\phi + i\sin n\phi)$$

Příklady na komplexní čísla II

(3) Najděte goniometrický tvar čísla $1 - i$.



$|1 - i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$1 - i = \sqrt{2}(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4})$

Obrácená úloha je lehká — spočítáme sinus a kosinus a roznásobíme absolutní hodnotou.

Příklady na komplexní čísla III

(4) Spočítejte mocninu $(1-i)^{10}$.

Využijeme znalost goniometrického tvaru z minulého příkladu a Moivreovu větu:

$(1-i)^{10} = (\sqrt{2})^{10}(\cos \frac{10 \cdot 7\pi}{4} + i \sin \frac{10 \cdot 7\pi}{4})$.

$\frac{70}{4} = 16 + \frac{3}{2}$, odtud $(1-i)^{10} = 2^5(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}) = -32i$

Zajímavé využití mocnin

Mocninu komplexního čísla lze spočítat i „hloupě“ z algebraického tvaru pomocí binomické věty:

$$(1-i)^{10} = \binom{10}{0}1^{10} - \binom{10}{1}1^9 i^1 + \binom{10}{2}1^8 i^2 - \cdots + \binom{10}{10} i^{10}.$$

Po úpravě a porovnání reálné a imaginární části se spočítanou mocninou dostaneme identity:

$$0 = \binom{10}{0} - \binom{10}{2} + \binom{10}{4} - \binom{10}{6} + \binom{10}{8} - \binom{10}{10},$$
$$32 = \binom{10}{1} - \binom{10}{3} + \binom{10}{5} - \binom{10}{7} + \binom{10}{9}.$$

Příklady na komplexní čísla IV

(5) Najděte všechna řešení rovnice $x^3 = -1$.

Řešení $x = -1$ vidíme hned.

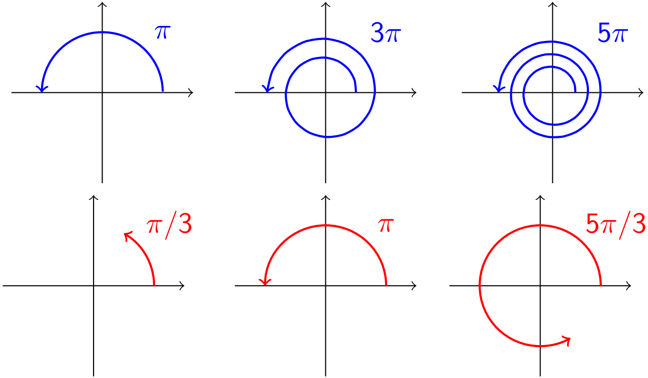
Ostatní dostaneme z goniometrického tvaru $-1 = 1(\cos\pi + i\sin\pi)$. Ptáme se, jak dostat úhel π nebo jeho posunutí o násobky 2π jako trojnásobek argumentu ϕ hledaného x:

$$\phi_1 = \frac{\pi}{3}, \qquad \phi_2 = \pi, \qquad \phi_3 = \frac{5\pi}{3}.$$

Převodem na algebraický tvar dostáváme 3 řešení:

$$x_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \qquad x_2 = -1 \qquad x_3 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Znázornění řešení mocninné rovnice



Řešení podobných *monomiálních/mocninných rovnic* vždy vytváří pravidelný n-úhelník se středem v 0, kde n je mocnina.

Komentáře ke komplexním číslům

- Využití komplexních čísel: pohodlnější popis fyzikálních teorií (kmity, vlnění, elektřina, kvantová mechanika), v algebře mají polynomy vždy „dost kořenů“, triky v matematické analýze, kombinatorice, atd.
- **Požadavky:** osvojení terminologie, úpravy výrazů na algebraický tvar, převody mezi algebraickým a goniometrickým tvrem, řešení mocninných rovnic.

Dělitelnost v $\mathbb{N}$ ($\mathbb{Z}$)

$a \mid b$ ... a dělí b, pokud existuje c takové, že $ac = b$

Kriteria dělitelnosti:

- 2 ... poslední číslice je sudá,
- 4 ... poslední 2 číslice jsou dělitelné 4,
- 5 ... poslední číslice je 0 nebo 5,
- 3 ... ciferný součet je dělitelný 3,
- 9 ... ciferný součet je dělitelný 9,
- 11 ... číslice sečtené se střídajícími se znaménky dávají číslo dělitelné 11 (rodná čísla, kontrola prohození sousedních číslic), příklad: 12342 je dělitelné 11, protože $1 - 2 + 3 - 4 + 2 = 0$.

Téma k zamyšlení: kriteria dělitelnosti v jiných číselných soustavách.

Dělení se zbytkem

Pro pevné přirozené n (tzv. *modul*) se zajímáme o možné zbytky celých čísel po dělení $a : n$. Jsou to $0, 1, \dots, n-1$. (Zbytek chceme nezáporný i pro záporná celá čísla!) Pro dané a je zbytek z dán jednoznačně, tj. $a = kn + z$ lze zapsat jediným způsobem.

Pojmy *dělenec, dělitel, podíl, zbytek, (největší) společný dělitel, (nejmenší) společný násobek*.

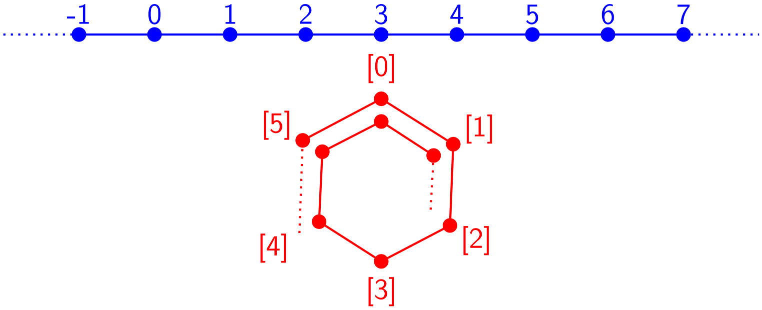
Pokud je NSD čísel a, b jedna, říkáme, že jsou *nesoudělná*.

Pokud a, b dávají po dělení n stejný zbytek, říkáme, že jsou *kongruentní modulo n* a píšeme

$$a \equiv b \pmod{n}.$$

Relace $\equiv$ je relací ekvivalence a dokonce kongruencí v algebraickém smyslu, tj. faktorizace $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/\equiv$ zachovává mnohé početní operace. Faktormnožinu (rozklad podle $\equiv$) značíme $\mathbb{Z}_n$.

Zbytkové třídy



$\mathbb{Z}_n$ ... množina zbytkových tříd modulo n

$[a] \in \mathbb{Z}_n$ ... třídy rozkladu

Pro operace se ověřuje korektnost, např.: $[a] + [b] = [a + b]$ říká, že sčítání nezávisí na volbě reprezentantů.

Ne vše se povede, např. nefunguje přenos uspořádání: $1 \leq 2$, ovšem $1 \equiv 7 \geq 2 \pmod 6$.

Pravidla pro počítání s kongruencemi

- Kongruence lze sčítat (podobně jako rovnice).
- Obě strany kongruence lze vynásobit stejným číslem.
- Obě strany kongruence lze vydělit stejným číslem, je-li toto číslo nesoudělné s modulem.
- Ke každé straně kongruence lze přičíst jakýkoli násobek modulu (výměna reprezentanta třídy).
- Místo většího zbytku z je někdy praktičtější volit jako reprezentanta záporné číslo $z - n$ s menší absolutní hodnotou (např. -1 místo 5 v modulu 6).

Příklady na zbytkové třídy I

(1) Určete zbytek po dělení čísla $14 \cdot 23$ šesti.

$14 \cdot 23 \equiv 2 \cdot (-1) = -2 \equiv 4 \pmod 6$, zbytek jsou 4.

(2) Řešte kongruenci $5x \equiv 8 \pmod 7$.

Posunutím 8 o 7 dostaneme $5x \equiv 15 \pmod 7$, přičemž 5 je nesoudělná s 7. Odtud $x \equiv 3 \pmod 7$, tedy zbytek jsou 3 (dobré udělat zkoušku).

Jiný způsob: $5x$ změníme na $-2x$ a kongruenci vydělíme -2, atd.

Eukleidův algoritmus

Eukleidův algoritmus počítá největší společný dělitel dvou přirozených čísel a, b. Hlavní myšlenka: Pokud $c \mid a$ i $c \mid b$, pak $c \mid a - b$ nebo ještě obecněji $c \mid a - kb$ pro libovolné b. Odebíráme co největší násobek menšího čísla z většího čísla. Menší číslo zaujme roli většího, spočítaný zbytek roli menšího. Postup opakujeme, dokud nevyjde 0. Hledaným NSD je zbytek z předchozí iterace.

Příklad: $a = 51, b = 15$.

$51 = 3 \cdot 15 + 6, a_1 = 15, b_1 = 6$

$15 = 2 \cdot 6 + 3, a_2 = 6, b_2 = 3$

$6 = 2 \cdot 3 + 0$, hotovo, zbytek je 3

Bezoutova věta

Věta

Pro každá dvě celá čísla a, b *existují celá čísla* k, l *taková, že*

$$ka + lb = m,$$

kde m *je největší společný dělitel* a, b*.*

Pro nás jsou důležité předpovídané koeficienty k, l. Počítáme je *rozšířeným Eukleidovým algoritmem* pro a, b. Ten si pamatuje průběžná vyjádření zbytků a skládá z nich k, l „zpětným chodem“.

Příklad: $a = 51, b = 15$

$6 = 51 - 3 \cdot 15$

$3 = 15 - 2 \cdot 6 = 15 - 2 \cdot (51 - 3 \cdot 15) = 7 \cdot 15 - 2 \cdot 51$

$k = -2, l = 7$

Aplikace Bezoutovy věty pro výpočet inverze

Inverzním prvkem k prvku a modulo n rozumíme takový prvek k, že $ka \equiv 1 \pmod{n}$. Inverzní prvek (pokud existuje) je jediný a značíme ho a^{-1}.

Inverzní prvek existuje jen pro a nesoudělné s n. (Např. násobky 2 modulo 6 jsou $0, 2, 4$, nikdy nic lichého, tedy ani 1.)

Existenci zaručuje Bezoutova věta pro volbu $b = n, m = 1$, protože rovnice $ka + lb = 1$ odpovídá kongruenci $ka \equiv 1 \pmod{n}$. Inverzi tedy můžeme počítat rozšířeným Euklidovým algoritmem, přičemž druhý koeficient l nás nezajímá.

Příklady na zbytkové třídy II

(3) Určete inverzi k 13 v modulu 20.

13 a 20 jsou nesoudělná, půjde to.

$7 = 20 - 13, 6 = 13 - 7 = 13 - (20 - 13) = 2 \cdot 13 - 20$

$1 = 7 - 6 = (20 - 13) - (2 \cdot 13 - 20) = 2 \cdot 20 - 3 \cdot 13$

Inverzí k 13 je tedy $-3 \equiv 17$.

Zkouška: $17 \cdot 13 \equiv -3 \cdot (-7) = 21 \equiv 1$.

Koeficienty pro zbytky lze pohodlně kontrolovat tabulkou:

z	a	b
20	1	0
13	0	1
7	1	-1
6	-1	2
1	2	-3

Komentáře ke zbytkovým třídám

- (Rozšířený) Eukleidův algoritmus je velmi rychlý i pro velká vstupní čísla.
- Základní počítání ve zbytkových třídách si později rozšíříme o umocňování (velkým exponentem), rozklady modulů a řešení soustav. Vlastnosti operací na zbytkových třídach mají uplatnění např. v šifrování.
- **Požadavky:** Základní kriteria dělitelnosti, řešení jednoduchých kongruencí, výpočet koeficientů do Bezouta (zejména v případě výpočtu inverze).

Polynomy

Polynom je formálně definován jako konečná posloupnost čísel, běžně ho zapisujeme ve tvaru

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

Běžné operace pak fungují očekávaným způsobem.

$a_n x^n$ (pro první $a_n \neq 0$) . . . *vedoucí člen*,

n . . . *stupeň polynomu*,

$a_1 x$ . . . *lineární člen*,

a_0 . . . *absolutní (konstantní) člen*,

a_i . . . *koeficienty*.

Formulace „polynom nad" říká, odkud bereme koeficienty. Např. polynom nad $\mathbb{R}$ je polynom s reálnými koeficienty.

Polynomiální funkce

Od polynomu odvozujeme *polynomiální funkci*. Odpovídá dosazování za x.

$$p(x) = 3x^3 - x^2 + x + 2.$$

$$p(1) = 3 - 1 + 1 + 2 = 5.$$

Řešení rovnice $p(x) = 0$ se nazývá *kořen polynomu*.

Zabýváme se rozkladem polynomu na *faktory*, tj. vyjádřením jako součin polynomů nižších stupňů. Ideálním výsledkem je rozklad na *kořenové faktory*, tj. lineární polynomy tvaru $x - k$ (kde k je kořen).

Lze-li některé kořenové faktory sdružit a vyjádřit vyšší mocninou, hovoříme o *násobném kořenu*, např.

$$p(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1 = (2x + 1)(x - 1)^2$$

má dvojnásobný kořen 1.

Příklad rozkladu polynomu v $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$

$$
\begin{aligned}
3x^3 + 2x^2 + 5x - 2 &= (3x-1)(x^2+x+2) \\
&= (3x-1)\left(x - \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)
\end{aligned}
$$

V reálném oboru je faktor (x^2+x+2) již nerozložitelný, protože odpovídající kvadratická rovnice má záporný diskriminant.

V komplexním oboru ho rozložíme „podle vzorce“, přičemž $\sqrt{-3} = \pm i\sqrt{3}$.

Obecné vlastnosti reálných polynomů

Reálný polynom se vždy rozpadá na lineární a nanejvýš kvadratické faktory.

Lineární faktory jsou kořenové, tedy poskytují reálné kořeny.

Reálný polynom lichého stupně proto má vždy aspoň jeden reálný kořen (z výše uvedeného i „náhledem“ na graf funkce).

V $\mathbb{R}$ nerozložitelné kvadratické faktory lze rozložit v $\mathbb{C}$. Kořeny jsou vzájemně komplexně sdružené.

Na hledání kořenů polynomů až do stupně 4 jsou (škaredé) vzorce, pro polynomy vyšších stupňů vzorce neexistují (dokázáno, nehledejte je). Nicméně kořeny lze vždy přibližně počítat numerickými metodami.

Racionální kořeny polynomů

Polynom s racionálními koeficienty má stejné kořeny jako jistý polynom s celočíselnými koeficienty (můžeme násobit společným jmenovatelem):

$$p(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{4}x + \frac{1}{2}$$
$$q(x) = 4x^3 - 15x + 6$$

Je-li zkrácený zlomek $\frac{a}{b}$ kořenem celočíselného polynomu $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, pak platí, že

$$a \mid a_0, \qquad b \mid a_n.$$

Dělení polynomů (se zbytkem)

Postupujeme analogicky jako na ZŠ při dělení čísel:

$$
\begin{array}{rrrrcrl}
(3x^3 & +4x^2 & -x & +3) & : & (x-2) & = 3x^2+10x+19 \\
-(3x^3 & -6x^2) & & & & & \\
 & 10x^2 & -x & +3 & & & \\
 & -(10x^2 & -20x) & & & & \\
 & & 19x & +3 & & & \\
 & & -(19x & -38) & & & \\
 & & & 41 & & &
\end{array}
$$

Platí tedy

$$3x^3 + 4x^2 - x + 3 = (3x^2 + 10x + 19)(x - 2) + 41.$$

Hornerovo schéma

Hornerovo schéma zjednodušuje zápis dělení lineárním polynomem.

Zase nechť dělíme $(3x^3 + 4x^2 - x + 3) : (x - 2)$.

	3	4	-1	3
2	3	10	19	41
1	3	7	6	9
-1	3	1	-2	5
3	3	13	38	117
-3	3	-5	14	-39
$1/3$	3	5	$2/3$	$29/9$
$-1/3$	3	3	-2	$11/3$

Pokud se dělení povede beze zbytku, vyjde v posledním sloupci 0.

Řádek odpovídá podílu polynomů, další kořenový faktor můžeme hledat v něm (ne v původním polynomu).

Hledání kořenů Hornerovým schématem

Příklad: Najděte racionální kořeny polynomu

$$2x^3 + 3x^2 - 1.$$

	2	3	0	-1
1	2	5	5	4
-1	2	1	-1	0
-1	2	-1	0	

Tedy $2x^3 + 3x^2 - 1 = (x+1)^2(2x-1)$.

Odpověď: dvojnásobný -1, jednoduchý $1/2$.

Hledání kořenů ve zbytkových třídách

Podobné, pozor na neekvivalentní úpravy.

Kandidátů na kořeny je konečně mnoho, přinejhorším lze všechny vyzkoušet pomocí Hornerova schématu.

Příklad: Najděte všechny kořeny polynomu $4x^3 - 2x^2 + x + 2$ v $\mathbb{Z}_3$.

Řešení: Polynom přepíšeme jako $x^3 + x^2 + x + 2$ nebo ještě lépe jako $x^3 + x^2 + x - 1$.

	1	1	1	−1
0	1	1	1	−1
1	1	2	0	−1
−1	1	0	1	−2

Odpověď: Žádné nejsou.

Komentáře k polynomům

- Polynomy se snadno derivují — viz analýza. Násobné kořeny jsou i kořeny derivovaného polynomu, násobnost klesá. Lze je tak nalézt pomocí NSD polynomu a jeho derivace.
- **Požadavky:** Výpočet kořenů kvadratického polynomu v $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$, hledání racionálních kořenů (pomocí Hornerova schématu), zjištění násobnosti, rozklad polynomu na kořenové faktory.

Matice

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -5 & 2 \\ 2 & 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Matice ... „obdélník čísel“, formálně zobrazení $I \times J \to \mathbb{R}$ $(\mathbb{C}, \mathbb{Z}_n, \dots)$,

$I = \{1, 2, \dots, m\}$ ... indexy *řádků*,

$J = \{1, 2, \dots, n\}$ ... indexy *sloupců*,

(m, n) (případně $m \times n$) ... *typ* matice,

$m = n$ ... *čtvercová matice*, místo typu hovoříme o *řádu* n,

a_{ij} ... *vstup (prvek)* matice.

Pak píšeme

$$A = (a_{ij})_{j \in J}^{i \in I}.$$

Sčítání matic

Součet matic $C = A + B$ je definován pro matice stejného typu.

Matice se sčítají „po složkách“, tj. po vstupech na stejných pozicích:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Příklad:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2-3 & -1+2 & 5-3 \\ 0+3 & 2-4 & -2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Násobení matic

Součin matic $C = A \cdot B$ je definován pro matice A typu $m \times n$ a B typu $n \times p$ a jeho typ je $m \times p$.

Počítá se složitěji:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}.$$

Interpretace: Vezmeme i-tý řádek matice A a j-tý sloupec matice B. Prvky těchto n-prvkových posloupností vynásobíme po složkách a výsledky sečteme.

Příklad:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 - 1 \cdot (-3) & 3 \cdot 1 - 1 \cdot 0 \\ -1 \cdot 2 + 0 \cdot (-3) & -1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) & 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ -2 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Transponování matice, násobení skalárem

Transponovaná matice $B = A^T$ k matici A typu $m \times n$ je typu $n \times m$ a je dána vztahem

$$b_{ij} = a_{ji}.$$

V transponované matici si řádky a sloupce vymění roli.

Obdélníkové schéme překlopíme podle hlavní diagonály:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$$

Násobením skalárem $B = cA$ rozumíme vynásobení všech vstupů matice stejným číslem:

$$b_{ij} = ca_{ij}$$

Vlastnosti součtu a součinu matic

Mnemotechnická pomůcka: **Ř**ádek a **S**loupec se řadí abecedně, tj. řádek je z první (levé) matice, sloupec z druhé (pravé) matice.

Obě operace jsou asociativní, tj.

$$A + (B + C) = (A + B) + C, \qquad A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C.$$

Sčítání je komutativní, násobení obecně **není**:

$$A + B = B + A, \qquad\qquad A \cdot B \neq B \cdot A$$

Platí distributivní zákony:

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C, \quad C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B.$$

Nulové a jednotkové matice

Pro každý typ máme nulovou matici, např.

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pro každý řád máme čtvercovou jednotkovou matici, např.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jedničky se nachází na *hlavní diagonále*, všude jinde jsou nuly.

O a E mají očekávané vlastnosti s ohledem na sčítání, resp. násobení:

$$O + A = A, \qquad E \cdot A = A \cdot E = A.$$

Mocnina matice

Matice musí být čtvercová, aby mělo umocňování smysl.

$$A^n = A \cdot A \cdot \ldots \cdot A \ (n\text{-krát})$$

Příklad: Nalezení n-tého členu Fibonacciho posloupnosti $1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_{n+2} \end{pmatrix}$$

Komentáře k maticovým operacím

- Polynomy a matice představují další algebraickou nástavbu nad čísly. Operace jsou ovšem částečné a násobení matic je nekomutativní.
- Binární relace lze ztotožnit s (ne nutně konečnými) maticemi nad Booleovou algebrou $\{0, 1\}$. Násobení matic odpovídá skládání relací.
- **Požadavky:** Zvládat operace s maticemi (bez pomocných výpočtů), znát vlastnosti operací a speciální matice O, E.

Přepis soustavy lineárních rovnic do matice

Příklad: Po dvoře běhá 30 nohou, patří k nim 10 krků, jsou tam jenom husy a kozy. Kolik je čeho?

$$\begin{aligned} h + k &= 10, \\ 2h + 4k &= 30. \end{aligned}$$

To odpovídá maticové rovnici

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \end{pmatrix}.$$

Dále úlohu řešíme zpravidla eliminací jedné proměnné, což odpovídá jisté manipulaci s maticí.

Matice soustavy

V obecnějším pojetí máme co dočinění s úlohou ve tvaru

$$A \cdot X = B,$$

A ... *matice soustavy*,

X ... *vektor neznámých*,

B ... *vektor pravých stran*,

$(A|B)$ ... *rozšířená matice soustavy*.

Strategie řešení: Kombinujeme rovnice (řádky rozšířené matice) tak, abychom vyjádřili a vypočítali aspoň jednu proměnnou. Tu následně dosadíme do zbylých rovnic, vyjádříme další proměnnou, atd.

Doporučená strategie: Rovnou se snažit o úpravu na *schodový tvar*.

Schodový tvar

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & 4 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pivot ... první nenulový vstup na daném řádku (v rámečku).

Schodový tvar matice ... pozice pivota se na dalším řádku posouvá aspoň o 1 doprava.

Úprava rozšířené matice na schodový tvar je vhodná příprava k dořešení soustavy postupným dosazováním.

Gaussova eliminační metoda

K úpravě na schodový tvar využíváme *elementární řádkové úpravy*. Rozlišujeme trojí typ:

- prohození řádků matice,
- vynásobení řádku nenulovým (invertibilním) číslem,
- vynásobení řádku jakýmkoli číslem a přičtení k jinému řádku.

Matice podstupující řádkové úpravy se mění. V průběžném výpočtu nepíšeme $=$, ale $\sim$. (Matice se nerovnají, ale jsou v určitém smyslu ekvivalentní.)

Elementární úpravy doporučujeme zaznamenávat na okraj matice.

Dořešení úlohy o zvířatech na dvoře

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 10 \\ 2 & 4 & | & 30 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-2) \\ + \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 10 \\ 0 & 2 & | & 10 \end{pmatrix}$$

Matice je ve schodovém tvaru a odpovídá upravené (ekvivalentní) soustavě

$$\begin{aligned} h + k &= 10, \\ 2k &= 10. \end{aligned}$$

Odtud $k = 5$. Dosazením do první rovnice dostaneme $h + 5 = 10$ a odtud $h = 5$.

Odpověď: Po dvoře běhá 5 husí a 5 koz.

Trochu náročnější soustava I

Řešte soustavu lineárních rovnic:

$$
\begin{aligned}
2x - y + 3z &= 0,\\
x + y - z &= 3,\\
x - y &= -1.
\end{aligned}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0\\ 1 & 1 & -1 & 3\\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right)
\sim
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3\\ 2 & -1 & 3 & 0\\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right)
\begin{array}{l} -2 \quad -1 \\ + \\ \quad\; + \end{array}
\sim
$$

$$
\sim
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3\\ 0 & -3 & 5 & -6\\ 0 & -2 & 1 & -4 \end{array}\right)
\begin{array}{l} \\ \mid \cdot(-2) \\ \mid \cdot 3 \end{array}
\sim
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3\\ 0 & 6 & -10 & 12\\ 0 & -6 & 3 & -12 \end{array}\right)
\begin{array}{l} \\ \\ + \end{array}
\sim
$$

$$
\sim
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3\\ 0 & 6 & -10 & 12\\ 0 & 0 & -7 & 0 \end{array}\right)
$$

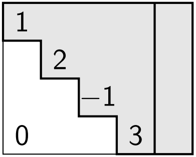
Trochu náročnější soustava II

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 6 & -10 & 12 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \end{array}\right)$$

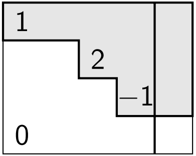
$$\begin{aligned} -7z &= 0 & z &= 0 \\ 6y - 10\cdot 0 &= 12 & y &= 2 \\ x + 1\cdot 2 - 1\cdot 0 &= 3 & x &= 1 \end{aligned}$$

Řešitelnost a jednoznačnost soustav

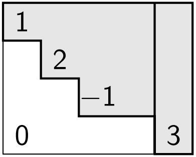
Rozhodne úprava na schodový tvar:



$3x = 1$ jediné řešení



$0x = 0$ více řešení



$0x = 3$ žádné řešení

Hodnost matice, Frobeniova věta

Počet nenulových řádků, které zůstanou po eliminaci na schodový tvar, nezávisí na postupu. Nazýváme jej *hodností matice A* a značíme $h(A)$.

Stejný výsledek bychom dostali i sloupcovými úpravami, tj. řádkovými úpravami transponované matice: $h(A) = h(A^T)$.

Hodnost obdélníkové matice je nejvýše menší z rozměrů.

Frobeniova věta: Soustava matice má řešení, pokud $h(A|B) = h(A)$, tj. hodnost matice soustavy je stejná jako hodnost matice rozšířené.

Řešení je jediné, pokud se hodnost shoduje i s počtem neznámých.

Pokud soustava řešení nemá, platí $h(A|B) = h(A) + 1$.

Soustavy s více řešeními

Je-li v $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ více řešení, je jich rovnou nekonečně mnoho. (V $\mathbb{Z}_n$ je vždy jen konečně mnoho řešení.)

Vyjadřujeme je parametricky.

Všechna řešení vytváří *afinní podprostor* (viz Geometrie). Počet parametrů odpovídá jeho dimenzi.

Řešení lze vyjádřit jako součet *partikulárního řešení* a obecného řešení *homogenní soustavy* $AX = O$.

Příklad: (soustava v $\mathbb{R}$)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & | & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 3z + u &= 2, & z &= a, & u &= 2 - 3a, \\ 2x + y - u &= 0, & x &= b, & y &= 2 - 3a - 2b. \end{aligned}$$

Řešení: $\{(b, 2-3a-2b, a, 2-3a) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

Komentáře k soustavám lineárních rovnic

- Většina úloh z analytické geometrie se bude transformovat na řešení jisté soustavy lineárních rovnic.
- **Požadavky:** Umět přepsat soustavu do matice, ovládat řádkovou eliminaci do schodového tvaru, umět dopočítat řešení soustavy dosazením, parametricky vyjádřit obecný tvar řešení. Vědět, kdy je soustava řešitelná.

Řádkové úpravy jako násobení matic

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b & c \\ d & e \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & c \\ f & g \\ d & e \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b & c \\ d & e \\ f & g \end{pmatrix} \begin{array}{l} \mid \cdot\, a \\ \\ \\ \end{array} = \begin{pmatrix} ab & ac \\ d & e \\ f & g \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b & c \\ d & e \\ f & g \end{pmatrix} \begin{array}{l} a \\ \\ + \end{array} = \begin{pmatrix} b & c \\ d & e \\ ab + f & ac + g \end{pmatrix}$$

Inverzní matice

Matice B se nazývá *inverzní* k matici A, pokud

$$A \cdot B = E, \qquad B \cdot A = E.$$

Inverzní matice k matici A existuje, pokud

- A je čtvercová,
- A má plnou hodnost, tj. $h(A)$ je rovna řádu A.

Druhá podmínka je ekvivalentní nenulovému determinantu (viz dále).

Pokud inverzní matice existuje, je dána jednoznačně. Značíme ji A^{-1}. Pokud platí jedna z rovností $AA^{-1} = E, A^{-1}A = E$, platí automaticky i druhá (to v algebře obecně neplatí).

Invertibilní matice se nazývají *regulární*. Neinvertibilní čtvercové matice se nazývají *singulární*.

Analogie s (ne)invertibilními prvky v $\mathbb{Z}_n$.

Výpočet inverzní matice

Inverzní matici počítáme Gaussovou eliminací podle schématu:

$$(A|E) \sim \cdots \sim (E|A^{-1})$$

Vysvětlení: Převod $A \to E$ sestává z posloupnosti maticových násobení $P_n \dots P_2 P_1 A = E$. Stejné úpravy se ale aplikují i na E, vpravo tedy dostáváme matici $P_n \dots P_2 P_1$. Z předchozí rovnosti plyne, že jde o inverzi.

Výpočet provádíme opět úpravou A na schodový tvar, pak pokračujeme obdobnou eliminací pravého horního trojúhelníku (nad hlavní diagonálou). Souběžně normalizujeme (převádíme na jedničky) pivoty v řádcích, abychom dostali E.

Příklad na inverzní matici I

Najděte inverzní matici k

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

$$(A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} -2 \\ + \\ + \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ | \cdot \frac{1}{2} \\ | \cdot \frac{1}{3} \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2/3 & 0 & 1/3 \end{array}\right) \sim$$

Příklad na inverzní matici II

$$
\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\
0 & -1 & -2 & -2/3 & 0 & 1/3
\end{array}\right)
\begin{array}{l} \\ \\ + \end{array}
\sim
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\
0 & 0 & -1 & -1/6 & 1/2 & 1/3
\end{array}\right)
\begin{array}{l} + \\ + \\ 3 \end{array}
\sim
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 2 & 0 & 1/2 & 3/2 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 1/3 & 1 & 1/3 \\
0 & 0 & -1 & -1/6 & 1/2 & 1/3
\end{array}\right)
\begin{array}{l} + \\ -2 \\ \mid \cdot (-1) \end{array}
\sim
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 0 & 0 & -1/6 & -1/2 & 1/3 \\
0 & 1 & 0 & 1/3 & 1 & 1/3 \\
0 & 0 & 1 & 1/6 & -1/2 & -1/3
\end{array}\right)
$$

Příklad na inverzní matici III

Odpověď:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/6 & -1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1 & 1/3 \\ 1/6 & -1/2 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Zkouška:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/6 & -1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1 & 1/3 \\ 1/6 & -1/2 & -1/3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Příklad selhání výpočtu pro singulární matici

Najděte inverzní matici k

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} .$$

$$(A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ + \\ + \end{array} \quad -1 \quad \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

A jsme v koncích.

Příklad využití inverzní matice

Soustavu lineárních rovnic vyjádřenou

$$AX = B$$

můžeme zleva vynásobit inverzí k A:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B$$

Inverzní matice musí existovat, postup lze užít jen pro speciální typ soustav.

Výpočet inverzní matice je pracnější než postupné dosazování.

Může se hodit, pokud se k inverzi dostaneme „lacino“, nebo v teoretických výpočtech.

Komentáře k inverzním maticím

- Pro inverzní matice řádu 2 se může hodit pamatovat si vzoreček, který brzy odvodíme.
- **Požadavky:** Znát definici a využití inverzních matic, umět počítat schématem se souběžnou úpravou jednotkové matice.

Stopa matice

Stopou tr A čtvercové matice A rozumíme součet diagonálních členů, tj.

$$\text{tr } A = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

Platí

$$\begin{aligned} \text{tr}(A+B) &= \text{tr } A + \text{tr } B, \\ \text{tr}(AB) &= \text{tr}(BA), \\ \text{tr}(A^T) &= \text{tr } A. \end{aligned}$$

Stopa se nemění změnou báze (viz Geometrie).

Jedná se o důležitou charakteristiku čtvercových matic.

Determinant matice — definice

Determinantem det A čtvercové matice A se nazývá číslo

$$\det A = \sum_{\pi \in S(n)} (-1)^{|\pi|} a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \dots a_{n\pi(n)}.$$

n ... řád matice A,

$S(n)$ ... permutace (bijekce na sebe) n-prvkové množiny,

$|\pi|$ ... parita permutace π (sudá/lichá), počítá se např. ze součtu transpozic,

$\pi(i)$ ... obraz prvku i v permutaci π.

Intuitivní vysvětlení: Každý člen determinantu odpovídá rozmístění n šachových věží na matici, aby se vzájemně neohrožovaly. Takových rozmístění je n!. Pro každé spočítáme „součin věží“ a určíme znaménko. Vše se sečte dohromady.

Vlastnosti determinantu

Platí

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B,$$
$$\det(A^T) = \det A,$$
$$\det(A^{-1}) = 1/(\det A).$$

Pro nás je zásadní zachování součinu (Cauchyova věta), protože umožní využít Gaussovu eliminaci pro výpočet determinantu:

$$\det(P_n \dots P_2 P_1 A) = \det P_n \cdot \ \dots \ \cdot \det P_2 \cdot \det P_1 \cdot \det A,$$

odkud

$$\det A = \frac{\det(P_n \dots P_2 P_1 A)}{\det P_n \cdot \ \dots \ \cdot \det P_2 \cdot \det P_1}.$$

Speciální determinanty

Determinant se často značí také $|A|$ a v maticovém zápisu rovné závorky nahrazují kulaté.

Je-li matice ve schodovém tvaru, jediný nenulový člen může být tvořen pouze hlavní diagonálou. Identita má sudou permutaci. Jedna transpozice, mění znaménko.

Dostáváme:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{vmatrix} = adf, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1,$$

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$|E| = 1, \qquad |O| = 0.$$

Pravidla pro výpočet determinantu Gaussovou eliminací

Z předchozího vyplývá:

- Chci-li některý z řádků vydělit a, musím a vytknout před determinant.
- Výměna řádků mění znaménko determinantu.
- Přičtení násobku řádku k jinému je „bezpečná úprava" a determinant se nemění.
- Místo řádkové eliminace můžeme provádět i sloupcovou, u determinantu je to jedno.
- Pozor na skalární násobení matice: V aA jsou skalárem a násobeny všechny řádky, proto $\det(aA) = a^n \cdot \det A$.
- Mezi výpočetní kroky píšeme $=$ (protože jde o stejné číslo).

Příklad na výpočet determinantu Gaussovou eliminací

Určete determinant matice Gaussovou eliminací

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 8 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 8 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \cdot(-2) \\ + \\ + \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \mid \cdot 4 \cdot \frac{1}{4} \\ \end{array} = -4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \cdot(-3) \\ + \end{array} =$$

$$= -4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 = -8$$

Laplaceův rozvoj determinantu

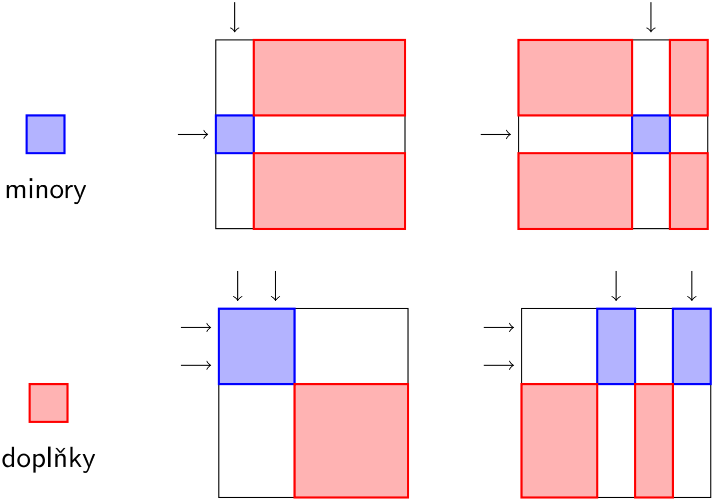
Při vhodných příležitostech využíváme k výpočtu determinantu *Laplaceův rozvoj*. Jedná se o organizaci členů z definice determinantu podle určitého řádků, sloupce, případně množiny řádků nebo množiny slopců. Determinant je vyjádřen mnohočlenem vytvořeným z determinantů menšího řádu, které vychází ze čvercových podmatic a říkáme jim *minory*.

Laplaceův rozvoj podle i-tého řádku:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det A_{ij},$$

kde A_{ij} je tzv. *doplněk* prvku a_{ij}. Jde o podmatici A vzniklou škrtnutím i-tého řádku a j-tého sloupce (je tedy čtvercová řádu $n-1$).

Znázornění minorů a doplňků



Pravidla pro výpočet determinantu Laplaceovým rozvojem

- Zvolený řádek/sloupec (množina) se musí projít celý. U k-prvkových množin řádků (sloupců) skládáme minory do čtverců ze všech možností výběru k sloupců (řádků).
- Znaménko členu počítáme jako $(-1)^s$, kde s je součet všech dotčených indexů řádků a sloupců.
- Řádky/sloupce pro rozvoj se snažíme volit tak, aby vyšlo co nejméně nenulových minorů nebo doplňků.
- Laplaceův rozvoj se hodí pro řídké matice (s hodně nulami), parametrické matice a teoretické výpočty.
- Laplaceův rozvoj lze vhodně kombinovat s Gaussovou eliminací.

Příklad na výpočet determinantu Laplaceovým rozvojem

Určete determinant matice Laplaceovým rozvojem podle 1. řádku

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 8 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 8 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (7 \cdot (-3) - 8 \cdot 2) - 2 \cdot (2 \cdot (-3) - 8 \cdot (-1)) +$$

$$+3 \cdot (2 \cdot 2 - 7 \cdot (-1)) = -37 - 4 + 33 = -8$$

Příklad na rozvoj podle dvou řádků

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 3-\lambda & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+2+1+2} \cdot \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{1+2+1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} + \ldots =$$

$$= ((-1-\lambda)(3-\lambda)+4)^2 = (\lambda^2 - 2\lambda + 1)^2 = (\lambda - 1)^4$$

Vlastnosti determinantů

Determinanty řádu 2 počítáme přímo:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Pro determinanty řádu existuje Sarrusovo pravidlo. Neučíme.

Nulový řádek nebo nulový sloupec jsou zjevné příznaky nulového determinantu.

Minory řádu $n-1$ s vhodnými znaménky lze poskládat do čtvercové matice řádu n. Výsledkem je tzv. *adjungovaná matice* adj A, kterou lze využít k přímému výpočtu inverzní matice:

$$A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{\det A}$$

. Pro řád 2 dostaneme vzoreček

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Cramerovo pravidlo

Je-li matice A regulární, lze (jediné) řešení $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ soustavy lineárních rovnic $AX = B$ vyjádřit

$$x_i = \frac{\det\ A_i}{\det\ A},$$

kde A_i je matice vzniklá nahrazením i-tého sloupce matice A vektorem pravých stran B.

Příklad:

$$\begin{aligned} h + k &= 10 \\ 2h + 4k &= 30 \end{aligned}$$

$$h = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 30 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{10}{2} = 5, \qquad k = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 2 & 30 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{10}{2} = 5.$$

Komentáře k determinantům

- Stopa zachovává sčítání matic, determinant zachovává násobení. Pro $n > 1$ neexistuje zobrazení $M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, které by zachovávalo obojí (homomorfismus okruhů). (Symbolem $M_n(\mathbb{R})$ je míněna množina všech čtvercových reálných matic řádu n.)
- Determinanty mají velmi široké využití. Část jsme si ukázali, další aplikace přijdou později (geometrie, lineární modely), v matematické analýze, ve statistice, atd.
- **Požadavky:** Chápat podstatu definice determinantu. Zvládnout oba způsoby výpočtu (Gauss, Laplace) a umět si mezi nimi vybrat pro danou úlohu/úpravu. Seznámit se s možnostmi využití determinantů.