Lineární modely MB141, 2. část

David Kruml

13. 3. 2024

Vektorové prostory

Vektorovým prostorem rozumíme neprázdnou množinu V s operacemi

- sčítání vektorů $u + v$
- a skalárním násobením $a \cdot v$.

Operace musí splňovat řadu axiomů (nebudeme si uvádět). *Skaláry* (čísla) tvoří tzv. *těleso*. Za těleso budeme zpravidla uvažovat reálná čísla $\mathbb{R}$, v mnohem menší míře komplexní čísla $\mathbb{C}$, případně zbytkové třídy $\mathbb{Z}_p$ pro p prvočíslo.

Prvky vektorového prostoru se nazývají *vektory*.

Nejdůležitější příklad vektorového prostoru je prostor reálných n-tic $\mathbb{R}^n$. Operace jsou dány „po složkách“:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n),$$

$$c(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (ca_1, ca_2, \ldots, ca_n).$$

Další příklady vektorových prostorů

(1) Prostor $M_{m\times n}\mathbb{R}$ reálných matic typu $m \times n$. Operace opět po složkách, od $\mathbb{R}^n$ se liší pouze „obdélníkovou strukturou“ složek vektorů.

(2) Prostor $\mathbb{R}_n[x]$ reálných polynomů stupně nejvýše n. Operace jsou:

$$(a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_1x + a_0) + (b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_1x + b_0) =$$

$$= (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0),$$

$$c(a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_1x + a_0) = ca_nx^n + ca_{n-1}x^{n-1} + ca_1x + ca_0,$$

tedy také „po složkách“.

Vektorové podprostory

Neprázdná podmnožina $U \subseteq V$ vektorového prostoru V se nazývá *vektorovým (lineárním) podprostorem*, pokud je uzavřená na sčítání a skalární násobení, tj. platí

$$u, v \in U, a \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; u + v, au \in U.$$

Příklady: (1) Přímka $U = \{(x, y) \mid y = x\}$ je podprostorem v $\mathbb{R}^2$:

$$(a, a) + (b, b) = (a + b, a + b) \in U, \quad c(a, a) = (ca, ca) \in U.$$

(2) Přímka $U = \{(x, y) \mid y = x + 1\}$ není podprostorem v $\mathbb{R}^2$:

$$(0, 1) + (1, 2) = (1, 3) \notin U, \qquad 2 \cdot (0, 1) = (0, 2) \notin U.$$

Naivní popis podprostorů: jsou „rovné“ (přímka, rovina), „běží do nekonečna“, „nelze se v nich schovávat“ (jsou konvexní) a procházejí nulou.

Lineární kombinace

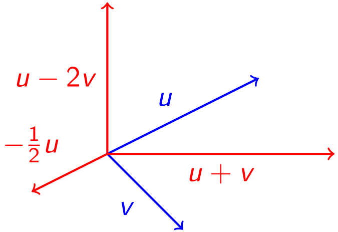
Lineární kombinací vektorů $v_1, \ldots, v_k$ rozumíme vektor

$$a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n,$$

kde $a_1 \ldots, a_n$ jsou skaláry.

Sčítání vektorů je jednoduchá lineární kombinace dvou vektorů (se skaláry $1, 1$), skalární násobení je vlastně lineární kombinace jediného vektoru.

Vektorové podprostory jsou uzavřené na jakékoli lineární kombinace (snadno dokážeme indukcí).



Generování podprostorů, lineární obal

Často nás zajímá, jak vypadá nejmenší podprostor obsahující určitou množinu vektorů M. Takový podprostor lze hledat dvěma způsoby:

- „Teoreticky“ — průnik všech podprostorů obsahujících M.
- „Konstruktivně“ — množina všech lineárních kombinací vektorů z M.

Vzniklý podprostor značíme $\langle M \rangle$ a nazýváme podprostorem *generovaným* množinou M nebo *lineárním obalem* množiny M.

Nejmenším podprostorem je *triviální podprostor* $\{0\}$ obsahující pouze nulový vektor. Je generován prázdnou množinou.

Kdy vektor patří do podprostoru?

Vektor v zřejmě patří do podprostoru $\langle M \rangle$, pokud se jej podaří vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů z M. Rozepsáním do složek vektoru dostáváme soustavu lineárních rovnic, v níž neznámé odpovídají skalárům v kombinaci. Příslušnost vektoru v do $\langle M \rangle$ pak diskutujeme jako řešitelnost soustavy.

Příklad: Rozhodněte, zda vektor $v = (1, 2, 3)$ patří do podprostoru $\langle u, w \rangle$ generovaného vektory $u = (0, 1, 2), w = (1, 1, -1)$ v $\mathbb{R}^3$.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Soustava nemá řešení. Odpověď: nepatří.

Úloha s více vektory

Pokud diskutujeme více vektorů, řešíme více soustav. Ty se ale liší pouze pravými stranami (kde vyměňujeme testované vektory). Lze si tak zjednodušit práci a řešit všechny soustavy souběžně.

Příklad: Rozhodněte, které z vektorů $u = (1, 1, -1), v = (2, 1, 3), w = (0, 1, 1)$ patří do podprostoru $\langle (1, 0, 1), (1, 2, 3) \rangle$.

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Odpověď: Do podprostoru patří v, w.

Nezávislost vektorů

Říkáme, že vektory $v_1, v_2, \ldots, v_k$ jsou *lineárně nezávislé*, pokud jedinými skaláry řešícími rovnost

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n = 0$$

jsou nuly. Jinými slovy, odpovídající homogenní soustava lineárních rovnic má pouze nulové (triviální) řešení.

Interpretace: Žádný z vektorů $v_1, v_2, \ldots, v_k$ není „zbytečný“ a při generování podprostoru $\langle v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle$ „přispívá“.

Pokud podmínka splněna není (dostaneme nulu i nějakou netriviální kombinací), pak říkáme, že vektory jsou *lineárně závislé*.

Mezi lineárně závislými vektory vždy existuje alespoň jeden, který je lineární kombinací ostatních. (Ale nemusí být hned zřejmé, který to je, proto je definice tak obecná.)

Posouzení nezávislosti vektorů

Se znalostí jednoznačné řešitelnosti soustavy víme, že nezávislost snadno zjistíme z hodnosti matice A vzniklé přepisem vektorů do sloupců: $v_1, v_2, \dots, v_k$ jsou nezávislé právě tehdy, když $h(A) = k$.

Příklad: Rozhodněte, zda vektory $(1,1,2,2), (1,2,3,4), (0,1,2,3)$ jsou nezávislé v $\mathbb{R}^4$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Odpověď: $h(A) = 3$, tedy vektory jsou nezávislé.

Báze

Lineárně nezávislé vektory vytváří jistý souřadný systém, v němž lze každý vektor (generovaného podprostoru) jednoznačně vyjádřit jako lineární kombinaci.

Pro daný prostor nebo podprostor hovoříme o jeho *bázi*. Je to maximální („nezvětšitelná“) *k*-tice nezávislých vektorů. Na pořadí vektorů v bázi velmi záleží, není to množina!

Příklad: Vektory $(1,0,1),(0,1,0),(1,2,0)$ jsou lineárně nezávislé a každý další vektor z $\mathbb{R}^3$ už by s nimi byl závislý. Jedná se tedy o maximální množinu a lze z nich sestavit bázi prostoru $\mathbb{R}^3$, např.:

$$((1,0,1),(0,1,0),(1,2,0))$$

Nulový vektor je s kterýmikoli vektory závislý (nulová kombinace), dokonce i sám se sebou. Tudíž v bázi nikdy být nemůže.

Standardní (kanonická) báze

V $\mathbb{R}^n$ se nejpohodlněji pracuje s tzv. *standardní (kanonickou) bazí*

$$\epsilon = ((1,0,\dots,0),(0,1,\dots,0),\dots,(0,0,\dots,1))$$

sestavenou ze sloupců jednotkové matice. Brzy uvidíme, že souřadnice vektorů v této bázi jsou přesně ty, na které jsme zvyklí.

V prostorech matic je kanonická báze tvořena maticemi, které mají právě jeden vstup 1 a ostatní jsou 0.

V prostorech polynomů jsou standardními bazemi posloupnosti $(1, x, x^2, \dots, x^n)$.

Doplnění množiny nezávislých vektorů do báze

Příklad: Z množiny $\{(1,1,1),(2,1,1),(-1,0,0)\}$ vyberte co nejvíc vektorů a doplňte je do báze celého prostoru $\mathbb{R}^3$.

Řešení: Vektory zapíšeme sloupcově do matice („strategicky“ si zvolíme vhodné pořadí) a rovnou si připravíme jednotkovou matici pro zjištění, který z vektorů standardní báze je vhodný k doplnění:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-1) \\ + \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Odpověď: Za bázi lze zvolit např. $((-1,0,0),(1,1,1),(0,1,0))$.

Pozor! V odpovědi se musí objevit původní vektory. Úpravy na schodový tvar vedou k pochopení závislostí, ale neposkytují smysluplné vektory.

Doporučení pro začátečníky: Postupně si rozmýšlet jen jeden vektor z pravé strany, ostatní zakrývat.

Dimenze prostoru a podprostoru

Lze dokázat, že počet vektorů v bázi pro pevně zvolený (pod)prostor V je vždy stejný. Nazývá se *dimenze* (pod)prostoru a značí $\dim V$.

Příklady: (1) $\dim \mathbb{R}^n = n$.

(2) $\dim M_{m\times n}\mathbb{R} = mn$.

(3) $\dim \mathbb{R}_n[x] = n + 1$.

(4) $\dim\{0\} = 0$.

Nás zajímají jen vektorové prostory konečné dimenze.

Dimenze se rovná hodnosti matice sestavené z vektorů báze: $\dim V = h(A)$.

O bazích platí tzv. Steinitzova věta o výměně, která umožňuje nahradit kterýkoli vektor jedné báze vhodným vektorem báze druhé.

Souřadnice vektoru v bázi

Libovolný vektor v z daného (pod)prostoru je vždy jednoznačnou lineární kombinací vektorů z báze α: Kdyby to nešlo, byl by vektor na bázi nezávislý a nebyla by tak maximální. Kdyby bylo vyjádření víc, značilo by to závislost v bázi.

Skalární koeficienty z kombinace nazýváme *souřadnicemi vektoru v v bázi* α a značíme v_α. Souřadnice vždy tvoří n-tici bez ohledu na prostor (tedy např. i v maticích a polynomech).

Souřadnice získáme dořešením soustavy lineárních rovnic, kde α je maticí soustavy a v je vektor pravých stran.

Příklad: Souřadnice vektoru $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ve standarní bázi $\epsilon = ((1,0),(0,1))$ jsou skutečně (a, b), protože

$$(a, b) = a(1,0) + b(0,1).$$

Příklad na souřadnice

Určete souřadnice vektoru $v = (0, 2, 3)$ v bázi $\alpha = ((1, 2, 0), (0, 1, 1), (1, 0, -1))$ vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} -2 \\ + \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -1 \\ + \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} z &= 1, & & \\ y - 2z &= 2, & \qquad y &= 4, \\ x + z &= 0, & \qquad x &= -1 \end{aligned}$$

Odpověď: $v_\alpha = (-1, 4, 1)$.

Zkouška: $-(1, 2, 0) + 4 \cdot (0, 1, 1) + (1, 0, -1) = (0, 2, 3)$.

Komentáře k vektorovým prostorům

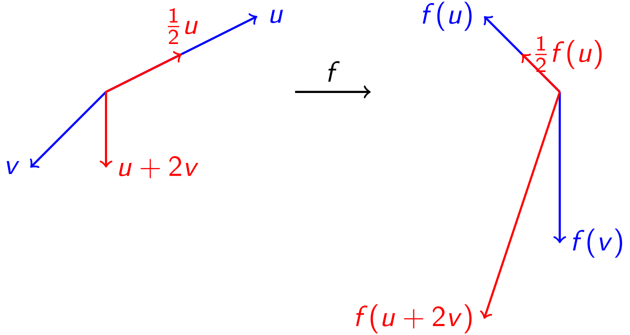
- Veškeré výpočetní konstrukce lze realizovat rozepsáním vektorů do sloupců matice a její úpravou na schodový tvar. Při výpočtu souřadnic v bázi pokračujeme řešením vzniklé soustavy, u jiných úloh stačí vhodně interpretovat příspěvky sloupců k nárůstu hodnosti matice.
- Úlohy přednostně řešíme nahloučením veškerých vstupních a pomocných vektorů (standardní báze) do společného maticového schématu.
- Přepisu vektorů do řádků se pro jednoduchost vyhýbáme, ale v některých aplikacích může být užitečný (např. hledání „pěkné“ báze podprostoru).
- **Požadavky:** Znát pojmy vektorový prostor, podprostor, lineární kombinace, generovaný podprostor/lineární obal, nezávislost vektorů, báze, standardní báze, souřadnice. Umět vyřešit související úlohy, zejména posoudit nezávislost vektorů, doplnit množinu do báze a spočítat souřadnice vektoru v bázi.

Lineární zobrazení

Zobrazení mezi dvěma vektorovými prostory (nad stejným tělesem) $f : U \to V$ se nazývá *lineární*, pokud zachovává sčítání a skalární násobení vektorů:

$$f(u+v) = f(u) + f(v), \qquad f(av) = af(v).$$

Lze opět snadno dokázat, že lineární zobrazení zachovává i libovolné lineární kombinace (a jde tedy o alternativní definici).



Příklady lineárních zobrazení I

(1) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, f(x, y, z) = (2x - y, x + y - 2z)$ je lineární zobrazení:

$$
\begin{aligned}
f((x,y,z)+(x',y',z')) &= f(x+x', y+y', z+z') \\
&= (2(x+x^{\text{‘}}) - (y+y'), (x+x') + (y+y') - 2(z+z')) \\
&= (2x - y, x + y - 2z) + (2x' - y', x' + y' - 2z') \\
&= f(x,y,z) + f(x',y',z') \\
f(a(x,y,z)) &= f(ax, ay, az) \\
&= (2ax - ay, ax + ay - 2az) \\
&= a(2x - y, x + y - 2z) \\
&= af(x,y,z)
\end{aligned}
$$

Příklady lineárních zobrazení II

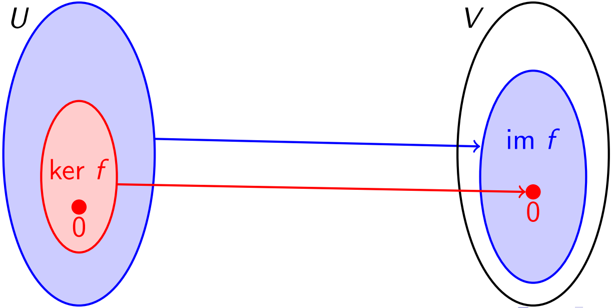
(2) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, f(x, y, z) = (2x - 1, xy + z)$ není lineární zobrazení:

$$f((1,0,0) + (0,1,0)) = f(1,1,0) = (1,1)$$
$$f(1,0,0) + f(0,1,0) = (1,0) + (-1,0) = (0,0)$$

$$f(0 \cdot (1,1,1)) = f(0,0,0) = (-1,0)$$
$$0 \cdot f(1,1,1) = 0 \cdot (1,2) = (0,0)$$

Vlastnosti lineárních zobrazení

- Lineární zobrazení vždy zachovává nulový vektor.
- Složky vektoru jsou v předpisu v samostatných členech a nejvýše v 1. mocnině, mohou být násobeny skalárem.
- *Obrazem* ($\operatorname{im} f$) celého definičního oboru je podprostor.
- Všechny vektory definičního oboru, které se zobrazují na nulu, tvoří také podprostor. Nazývá se *jádro* ($\ker f$).
- Složení lineárních zobrazení je lineární. Má-li lineární zobrazení inverzi, pak je také lineární.



Matice zobrazení ve standardních bazích

Protože každý vektorový prostor pokrývají lineární kombinace bázových vektorů, stačí lineární zobrazení zadat pouze na bázových vektorech, nejlépe pro standardní bázi.

Příklad: O zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ víme, že je lineární a platí:

$$f(1,0) = (1,2,0), \qquad f(0,1) = (-1,3,1).$$

Najděte předpis zobrazení.

Řešení:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x(1,0) + y(0,1)) = xf(1,0) + yf(0,1) \\ &= x(1,2,0) + y(-1,3,1) = (x-y, 2x+3y, y) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Sestavení matice zobrazení (ve standardních bazích)

Postup demonstrovaný na předchozím příkladu funguje obecně. Známe-li obrazy vektorů standardní báze, stačí je *sloupcově* (a ve správném pořadí) vyskládat do matice.

Pro libovolný vektor v z definičního oboru zobrazení f a takto získanou matici A pak platí

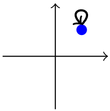
$$f(v) = Av,$$

přičemž vektor v píšeme na pravé straně jako sloupcový.

Úmluva: Nebudeme moc prožívat, zda psát v nebo v^T. Vektory budeme do matic přepisovat, jak se to bude hodit.

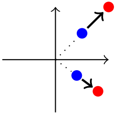
Příklady lineárních zobrazení v $\mathbb{R}^2$ I

Identita:



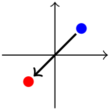
$$f(x,y) = (x,y) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Stejnolehlost s koeficientem k a středem 0:



$$f(x,y) = (kx,ky) \qquad \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

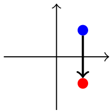
Středová symetrie kolem 0:



$$f(x,y) = (-x,-y) \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

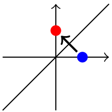
Příklady lineárních zobrazení v $\mathbb{R}^2$ II

Zrcadlení (symetrie) kolem osy x:



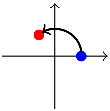
$$f(x,y) = (x,-y) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Zrcadlení kolem přímky $y = x$:



$$f(x,y) = (y,x) \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

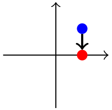
Otáčení kolem 0 o úhel ϕ:



$$f(x,y) = (x\cos\phi - y\sin\phi, x\sin\phi + y\cos\phi) \qquad \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

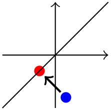
Příklady lineárních zobrazení v $\mathbb{R}^2$ III

Promítání (projekce) na osu x:



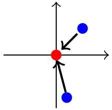
$$f(x,y) = (x,0) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Promítání na přímku $y = x$:



$$f(x,y) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right) \qquad \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Nulové zobrazení (projekce na bod):



$$f(x,y) = (0,0) \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Determinant jako charakteristika zobrazení

Stejnolehlost ... $\det A = k^2$

Přímá shodnost (otáčení, středová symetrie) ... $\det A = 1$.

Nepřímá shodnost (symetrie kolem přímky) ... $\det A = -1$.

Projekce, nulové zobrazení ... $\det A = 0$.

Podobné vlastnosti platí i obecněji v $\mathbb{R}^3$ (a vyšších dimenzích), ale determinant nestačí např. k rozlišení projekce na přímku a projekce na rovinu. Přesnější charakteristiku nám poskytnou *vlastní čísla*.

Neplatí obráceně, tj. např. z $\det A = 1$ nemohu usuzovat, že jde o přímou shodnost.

Vztah obrazu a jádra

Dimenze obrazu udává „míru zachování“ vektorů z definičního oboru zobrazení, dimenze jádra naopak jejich „míru zničení“. Pro lineární zobrazení $f : U \to V$ platí

$$\dim \operatorname{im} f + \dim \ker f = \dim U.$$

Z dimenze jádra odvodíme např. typ projekce v $\mathbb{R}^3$ — zda jde o projekci na rovinu, na přímku, nebo dokonce nulové zobrazení.

Složené a inverzní zobrazení

Jsou-li $f : U \to V, g : V \to W$ lineární zobrazení s maticemi A, B, platí pro složené zobrazení

$$(g \circ f)(v) = g(f(v)) = g(Av) = B(Av) = (BA)v$$

pro libovolný vektor $v \in U$.

Tj. *matici složeného zobrazení je součin matic*.

Pokud je g inverzní zobrazení k f, je $g \circ f = id_U$. Maticí identického zobrazení je jednotková matice E, odkud dostáváme, že *maticí inverzního zobrazení je inverzní matice*.

Nalezení „pěkné“ báze podprostoru I

Příklad: Najděte bázi podprostoru
$\langle (2,1,-2,1),(-1,-1,2,0),(1,2,-4,3),(3,0,0,-1)\rangle$ v $\mathbb{R}^4$.

Řešení: Místo obvyklého sloupcového přepisu (a výběru nezávislých vektorů) zkusíme řádkový přepis a nalezení jiné báze. Elementární řádkové úpravy vytváří lineární kombinace výchozích řádků, proto se stále nacházíme v podprostoru.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -4 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & 6 & -10 \end{pmatrix} \sim$$

Nalezení „pěkné“ báze podprostoru II

$$
\sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \mid \cdot (-1) \\ \mid \cdot (-1) \\ \mid \cdot \frac{1}{4} \\ \end{array} \sim
$$

$$
\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

Odpověď: Báze podprostoru je např. trojice vektorů $((1, 0, 0, 0), (0, 1, -2, 0), (0, 0, 0, 1))$.

Využití konstrukce pro výpočet matice zobrazení I

Matici zobrazení už umíme sestavit v případě, že známe obrazy vektorů standardní báze.

Příklad:

$$
\begin{aligned}
(1,0,0) &\mapsto (2,3,-1)\\
(0,1,0) &\mapsto (1,0,-1)\\
(0,0,1) &\mapsto (-1,3,2)
\end{aligned}
$$

Obrazy přepíšeme sloupcově a máme matici zobrazení:

$$
\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}
$$

Využití konstrukce pro výpočet matice zobrazení II

Pokud neznáme obrazy vektorů standardní báze, ale známe obrazy jiné báze (nebo generující množiny), najdeme matici zobrazení vyjádřením standardní báze a souběžným vyjádřením jejího obrazu jako odpovídající lineární kombinace.

Příklad:

$$\begin{aligned}(1,2,3) &\mapsto (2,3,-1)\\ (-1,1,0) &\mapsto (1,0,-1)\\ (3,0,1) &\mapsto (-1,3,2)\end{aligned}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{aligned}(1,0,0) &\mapsto \quad ?\\ (0,1,0) &\mapsto \quad ?\\ (0,0,1) &\mapsto \quad ?\end{aligned}$$

Řešení příkladu na matici zobrazení I

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 2 & 3 & 2 & 3 & -1 \\
-1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\
3 & 0 & 1 & -1 & 3 & 2
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\ \ -3 \\
+ \\
\ \ +
\end{array}
\sim
$$

$$
\sim
\left(\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 2 & 3 & 2 & 3 & -1 \\
0 & 3 & 3 & 3 & 3 & -2 \\
0 & -6 & -8 & -7 & -6 & 5
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\phantom{2 \mid \cdot \tfrac{1}{3}}\ + \\
2 \mid \cdot \tfrac{1}{3}\ -2 \\
+
\end{array}
\sim
$$

$$
\sim
\left(\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1/3 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -2/3 \\
0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\phantom{\mid \cdot (-\tfrac{1}{2})\ -1}\ \ + \\
\phantom{\mid \cdot (-\tfrac{1}{2})}\ + \\
\mid \cdot (-\tfrac{1}{2})\ -1\ -1
\end{array}
\sim
$$

$$
\sim
\left(\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 0 & 0 & -1/2 & 1 & 5/6 \\
0 & 1 & 0 & 1/2 & 1 & -1/6 \\
0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & -1/2
\end{array}\right)
$$

Řešení příkladu na matici zobrazení II

Odpověď: Matice zobrazení je

$$\begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5/6 & -1/6 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Zkouška:

$$\begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5/6 & -1/6 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5/6 & -1/6 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5/6 & -1/6 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Příklad na projekci

V $\mathbb{R}^3$ najděte matici projekce na rovinu určenou vektory $u = (1, 2, 3), v = (-1, 0, 1)$.

Náčrt řešení: Víme, že vektory u, v se projekcí zachovají, tj. $f(u) = u, f(v) = v$. Zbývá najít ještě jeden vektor nezávislý s u, v, a zjistit o něm, kam se projekcí zobrazí. Výhodné je vzít vektor w kolmý na u, v, pro který dostáváme $f(w) = 0$. (Trochu předbíháme, kolmost budeme zjišťovat pomocí skalárního součinu příště.) Takovým vektorem je např. $w = (1, -2, 1)$. Sestavíme schéma

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

a dořešíme jako předchozí úlohu.

Komentáře k lineárním zobrazením

- Matice zobrazení lze vyjádřit i v obecných bazích, např. $f_{\beta\alpha}$ označuje matici, která vektory vyjádřené v bázi α zobrazí pomocí f a vyjádří v bázi β cílového prostoru. Ke změně souřadného vyjádření mezi bazemi se využívají tzv. *matice přechodu* (nemáme, nevedeme).
- Konstrukce pro výpočet matice zobrazení připomíná výpočet inverzní matice. Nejedná se o náhodu — pro inverzní zobrazení známe vektory, které se zobrazují na standardní bázi.
- **Požadavky**: Znát definici a vlastnosti lineárního zobrazení. Rozumět matici zobrazení a jejímu užití. Znát matice zobrazení pro jednoduché lineární transformace roviny včetně otáčení. Pro danou transformaci prostorů $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ si umět zvolit vhodnou bázi, pro kterou známe výsledek po transformaci. Umět spočítat matici zobrazení při znalosti obrazů obecné báze (nebo generující množiny vektorů).
- Nezapomínejte po využití konstrukce přepsat vektory sloupcově (transponovat matici).

Vlastní čísla a vlastní vektory

Čtvercové matice můžeme chápat jako matice lineárních transformací prostoru na sebe $f : V \to V$.

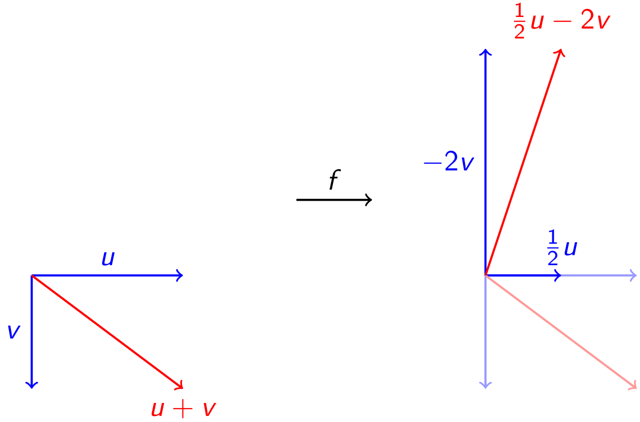
Zajímáme se o vektory, které až na násobek „zůstávají samy sebou", tj. $f(v) = \lambda v$ pro vhodný skalár λ. Nezajímáme se o nulový vektor, který rovnost splňuje vždy a pro libovolné λ.

Vlastním vektorem lineární transformace $f : V \to V$ / čtvercové matice A nazýváme nenulový vektor v, pro nějž existuje skalár λ splňující

$$f(v) = Av = \lambda v.$$

Skalár λ nazýváme *vlastním číslem* (ten může být i 0).

Obrázek k vlastním vektorům



Modré vektory jsou vlastní, červený není.

Příklady vlastních čísel a vlastních vektorů I

(1) Pro identické zobrazení je každý nenulový vektor vlastní s vlastním číslem 1.

(2) Pro stejnolehlost je také každý nenulový vektor vlastní, vlastním číslem je koeficient k.

(3) I ve středové symetrii jsou všechny vektory vlastní s vlastním číslem -1.

(4) Jiná otáčení vlastní čísla nemají, ledaže bychom uvažovali komplexní obor. Vlastní čísla jsou $\cos\phi \pm i \sin\phi$, přičemž argument ϕ odpovídá úhlu otáčení.

Příklady vlastních čísel a vlastních vektorů II

(5) Symetrie podle přímky mají dvě množiny vlastních čísel:

- Vektory ležící v ose — transformací se nehýbou, mají vlastní číslo 1.
- Vektory kolmé na osu — transformací se mění na opačné, mají vlastní číslo -1.

(6) Projekce na přímku také mají dvě množiny vlastních čísel:

- Vektory ležící v ose — vlastní číslo 1.
- Vektory kolmé na osu — transformací jsou „zničeny“, vlastní číslo 0.

(7) V nulovém zobrazení jsou všechny nenulové vektory vlastní a mají vlastní číslo 0.

Podprostory a báze z vlastních vektorů

Je zřejmé, že každý nenulový násobek vlastního vektoru je opět vlastní. Dokonce platí, že vlastní vektory se společným vlastním číslem tvoří lineární podprostor:

$$A(au + bv) = aAu + bAv = a\lambda u + b\lambda v = \lambda(au + bv).$$

Vlastních vektorů nemusí být dost pro sestavení báze celého prostoru. Pokud se to ale podaří, dokážeme snadno zrekonstruovat matici zobrazení. Složitější situace řeší tzv. *Jordanův kanonický tvar* lineární transformace.

Výpočet vlastních čísel a vlastních vektorů I

Maticovou rovnici

$$Av = \lambda v$$

můžeme upravit:

$$\begin{aligned} Av - \lambda v &= 0 \\ Av - \lambda E v &= 0 \\ (A - \lambda E) v &= 0 \end{aligned}$$

a pohlížet na ni jako na homogenní soustavu lineárních rovnic s neznámými v a parametrem λ.

Ta má vždy triviální řešení $v = 0$, o které nestojíme. Netriviální řešení existují v případě, že $A - \lambda E$ je singulární (neinvertibilní, snížená hodnost, nulový determinant).

Výpočet vlastních čísel a vlastních vektorů II

Řešíme tedy otázku, pro která λ je

$$|A - \lambda E| = 0.$$

Výpočtem determinantu dojdeme k výrazu s mocninami λ. Nazýváme jej *charakteristickým polynomem* matice A.

Kořeny charakteristického polynomu jsou vlastní čísla. Vlastní vektory nalezneme postupným dosazením vlastních čísel a dořešením výchozí homogenní soustavy.

Stačí nám najít bázová řešení, z nichž ostatní vlastní vektory půjdou vyjádřit jako lineární kombinace.

Příklad na vlastní čísla a vlastní vektory I

Najděte vlastní čísla a vlastní vektory pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a určete typ příslušného zobrazení.

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda) \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda) \left(\left(\frac{1}{2} - \lambda \right)^2 - \left(-\frac{1}{2} \right)^2 \right) = (1-\lambda) \left(\frac{1}{4} - \lambda + \lambda^2 - \frac{1}{4} \right) =$$

$$= (1 - \lambda)(-\lambda + \lambda^2) = -(1 - \lambda)^2 \lambda$$

Příklad na vlastní čísla a vlastní vektory II

Máme dvojnásobný kořen 1 a jednoduchý 0. Dosadíme $\lambda = 1$ do homogenní soustavy $(A - \lambda E)v = 0$:

$$(A - 1 \cdot E|0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - 1 & -\frac{1}{2} & 0 & | & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} - 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 - 1 & | & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & | & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Prostor řešení je dvojrozměrný, generován např. dvojicí vektorů $(1, -1, 0), (0, 0, 1)$.

Příklad na vlastní čísla a vlastní vektory III

Pokračujeme dosazením $\lambda = 0$ do homogenní soustavy $(A - \lambda E)v = 0$:

$$(A - 0 \cdot E|0) = (A|0) = \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Prostor řešení je jednorozměrný, generován např. vektorem $(1, 1, 0)$.

Pro spočítané vlastní vektory jsme zjistili:

$$\begin{aligned} (1, -1, 0) &\mapsto (1, -1, 0), \\ (0, 0, 1) &\mapsto (0, 0, 1), \\ (1, 1, 0) &\mapsto (0, 0, 0). \end{aligned}$$

Odpověď: Matice určuje kolmou projekci prostoru $\mathbb{R}^3$ na rovinu generovanou vektory $(1, -1, 0), (0, 0, 1)$.

Významné lineární transformace prostoru $\mathbb{R}^3$

(1) Středová symetrie ... trojnásobný kořen char. polynomu -1.

(2) Symetrie podle přímky ... jednoduchý kořen 1 (vektory přímky), dvojnásobný -1 (rovina kolmá k přímce).

(3) Otáčení podle přímky o úhel jiný než 0 a π ... jednoduchý kořen 1, dva komplexní (sdružené) kořeny (viz otáčení v rovině).

(4) Symetrie podle roviny ... dvojnásoný kořen 1 (vektory roviny), jednoduchý -1 (přímka kolmá k rovině).

(5) Projekce na přímku ... jednoduchý kořen 1 (vektory přímky), dvojnásobný 0 (rovina kolmá k přímce).

(6) Projekce na rovinu ... dvojnásoný kořen 1 (vektory roviny), jednoduchý 0 (přímka kolmá k rovině).

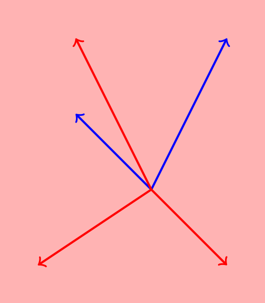
Komentáře k vlastním číslům a vlastním vektorům

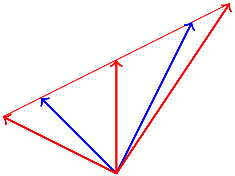
- Dimenze podprostoru vlastních vektorů pro dané vlastní číslo λ nazýváme jeho *geometrickou násobností*. Násobnost λ jakožto kořene charakteristického polynomu se nazývá *algebraickou násobností*. Platí, že geometrická násobnost je menší nebo rovna algebraické.
- Pokud se zajímáme o určité speciální hodnoty vlastních čísel (v Aplikacích to bude zejména 1), nemusí být nutné řešit charakteristický polynom, ale pouze testovat, zda je dané λ kořenem (např. Hornerovým schématem).
- **Požadavky:** Znát podstatu a význam vlastních vektorů pro lineární transformace vektorového prostoru. Umět sestavit determinant $|A - \lambda E|$, spočítat ho a najít kořeny charakteristického polynomu. Umět spočítat vlastní vektory jako řešení homogenní soustavy po dosazení kořene. Umět rozpoznat význačné lineární transformace (symetrie a projekce) v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$.

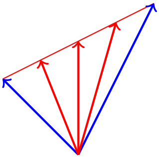
Lineární, afinní, konvexní kombinace

$$au + bv$$

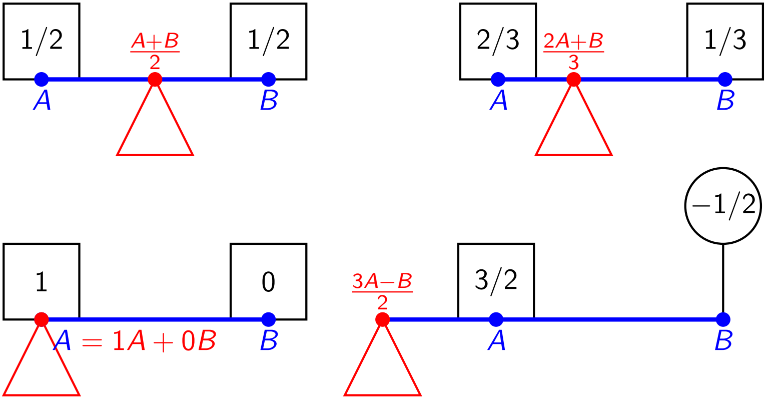
lineární	afinní	konvexní
$a, b \in \mathbb{R}$	$a + b = 1$	$a + b = 1, a, b \geq 0$







Fyzikální význam afinních kombinací — těžiště systému



Afinní podprostory

Obecná afinní kombinace vektorů $v_1, v_2, \ldots, v_n$:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n$$

pro

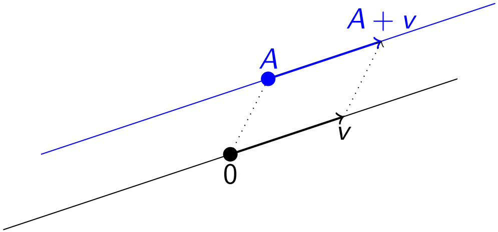
$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1.$$

Podmnožinu vektorového prostoru uzavřenou na afinní kombinace nazýváme *afinním podprostorem*.

Afinní prostory lze definovat abstrakně, my to dělat nebudeme.

Intuitivně: afinní podprostory „tvarově odpovídají“ lineárním (bod, přímka, rovina, ...), ale nemusí procházet počátkem.

Parametrický tvar afinního podprostoru I



Obecný parametrický tvar:

$$A + a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n$$

A ... „počátek“ (není určen jednoznačně)

$\langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$ ... *zaměření*

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ ... libovolné parametry (už nemusí být v součtu 1)

Parametrický tvar afinního podprostoru II

Rozlišujeme:

- „body" — prvky afinního podprostoru, velká písmena, souřadnice v hranatých závorkách, „prvky typu 1".
- „vektory" — prvky zaměření, malá písmena, souřadnice v kulatých závorkách, „prvky typu 0".

Můžu: $A + v, A - B, \frac{A+B}{2}$, nemůžu: $A + B, v - A$.

Dimenzí afinního podprostoru je míněna dimenze jeho zaměření.

Výroba vektorů zaměření z bodů:

$$\overrightarrow{AB} = B - A.$$

n bodů v obecné pozici generuje $n - 1$-rozměrný afinní podprostor: jeden bod zvolíme za počátek, vektory vyrobíme jeho odečtením od ostatních.

Příklady na parametrický tvar

(1) Najděte parametrické vyjádření afinního podprostoru P v $\mathbb{R}^3$ generovaného body $A = [1, 2, 3]$, $B = [1, 0, 1]$, $C = [-2, 3, 4]$.

Řešení: $\overrightarrow{BA} = A - B = (0, 2, 2) \sim (0, 1, 1)$, $\overrightarrow{BC} = C - B = (-3, 3, 3) \sim (-1, 1, 1)$, tedy $P : B + \langle (0, 1, 1), (-1, 1, 1) \rangle$.

(2) Najděte parametrické vyjádření afinního podprostoru P v $\mathbb{R}^3$ generovaného body $A = [0, 2, 1]$, $B = [1, 3, 3]$ a vektorem $v = (-1, 0, 1)$.

Řešení: $\overrightarrow{AB} = B - A = (1, 1, 2)$, tedy $P : A + \langle v, (1, 1, 2) \rangle$.

Součet podprostorů

Součtem podprostorů rozumíme nejmenší podprostor, který je obsahuje.

Výpočetně jednoduché — sloučíme veškeré generující body/vektory, převedeme na parametrický tvar, případně vyloučíme ze zaměření nadbytečné vektory, aby zůstaly jen lineárně nezávislé.

Příklad: Určete součet $P+Q$ podprostorů $P:[1,2,3]+a(0,1,-1)$ a $Q:[1,0,3]+b(1,1,0)$.

Řešení: Označme $A=[1,2,3], B=[1,0,3]$. Pak
$\overrightarrow{AB}=B-A=(0,-2,0)\sim(0,1,0)$, tedy
$P+Q: A+\langle(0,1,-1),(1,1,0),(0,1,0)\rangle$. Vektory zaměřený jsou 3 a nezávislé, mohli jsme tedy psát $P+Q=\mathbb{R}^3$ nebo např.
$P+Q:[0,0,0]+\langle(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\rangle$

Průnik podprostorů

Bod patří do průniku, pokud patří do každého z podprostorů.

Lze ho tedy vyjádřit parametricky pro každý podprostor zvlášť.

Položením rovnosti mezi vyjádření vytvoříme soustavu lineárních rovnic.

Řešením jsou koeficienty do parametrického vyjádření, dosazením dostaneme hledaný průnik.

Průnik nejčastěji hledáme pro dva podprostory, pro více podprostorů řešíme úlohu iterativně.

$$P : A + a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n,$$
$$Q : B + b_1 u_1 + b_2 u_2 + \cdots + b_m u_m$$

$$A + a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n = B + b_1 u_1 + b_2 u_2 + \cdots + b_m u_m$$

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n - b_1 u_1 - b_2 u_2 - \ldots - b_m u_m = B - A$$

Příklad na průnik podprostorů

Určete průnik podprostorů $P : A + au + bv$, $Q : B + cw + dx$, kde $A = [3, 4, -1], u = (1, 0, -1), v = (1, -1, 0), B = [2, 2, -1], w = (0, 2, 1), x = (1, 1, 1)$.

Řešení: $B - A = (-1, -2, 0)$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & -3 \end{array}\right)$$

Stačí nám jen jedno vyjádření, budeme tedy počítat jen c, d z poslední rovnice: $-3(c + d) = -3 \;\Rightarrow\; c = 1 - d$.

Odpověď: $P \cap Q : B + (1 - d)w + dx = (B + w) + d(x - w) = [2, 4, 0] + d(1, -1, 0)$.

Zkouška: $x - w = v$, patří tedy i do zaměření P, bod $[2, 4, 0]$ vyjádříme jako $A - u$.

Obecný tvar podprostoru, normálový vektor

Jiný způsob zadání afinního podprostoru představuje tzv. *obecný tvar*. V něm je podprostor určen jako množina všech bodů $[x_1, x_2, \ldots x_n]$, jež jsou řešením soustavy lineárních rovnic

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n &= b_k \end{aligned}$$

Čím víc nezávislých rovnic, tím víc omezení a tím menší podprostor.

Každá rovnice odpovídá tzv. *nadrovině*, jejíž dimenze je o 1 menší než celého prostoru. Její koeficienty každé rovnice $(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n})$ odpovídají *normálovému vektoru*, který je na ni kolmý (viz později).

Být řešením soustavy znamená patřit do průniku nadrovin.

Obecný tvar přímky a roviny

V $\mathbb{R}^2$ je přímka zadána jednou obecnou rovnicí, v $\mathbb{R}^3$ dvěma.

Rovina v $\mathbb{R}^3$ je zadána jednou obecnou rovnicí.

Úlohy na průnik se nejsnáze řeší, je-li jeden podprostor zadán parametricky a druhý obecně: parametrický tvar jednoduše dosadíme do rovnic obecného vyjádření a zjistíme tak omezení pro parametry.

Jsou-li oba podprostory zadány obecně, řešíme soustavu vzniklou sjednocením rovnic z obou vyjádření.

Obecný tvar lze převést na parametrický řešením soustavy.

Parametrický tvar lze převést na obecný nalezením normálového vektoru (či vektorů),

Příklad na průnik s parametrickým a obecným tvarem podprostorů

Určete průnik přímek $p : [3,2] + a(1,1)$ a $q : 2x - y - 2 = 0$ v $\mathbb{R}^2$.

Řešení: Dosadíme $x = 3 + a, y = 2 + a$ do obecné rovnice přímky q:

$$2(3 + a) - (2 + a) - 2 = 0.$$

Dostáváme $a = -2$, tedy průsečíkem je bod $[3,2] - 2 \cdot (1,1) = [1,0]$.

Vzájemná poloha přímek v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$

Pro přímky v $\mathbb{R}^2$ rozlišujeme tři možnosti:

- *různoběžné* — průnikem jediný bod (průsečík), soustava jednoznačně řešitelná,
- *rovnoběžné* — průnik prázdný, soustava neřešitelná,
- *splývající* — přímky se rovnají a tudíž i jejich průnik, soustava má nekonečně řešení (1 parametr).

V $\mathbb{R}^3$ (když přímky leží v rovině) je navíc případ, že přímky jsou *mimoběžné*. Soustava opět není řešitelná.

Případy rovnoběžných a mimoběžných přímek rozlišíme srovnáním jejich zaměření: jsou-li zaměření stejná, jde o rovnoběžky, jinak jde o mimoběžky.

Vzájemná poloha podprostorů v $\mathbb{R}^3$

Dále se zajímáme zejména o úlohy:

- přímka a rovina — podobné jako dvě přímky v $\mathbb{R}^2$, jen místo splývání máme případ, že přímka leží v rovině,
- dvě roviny — také obdobné poloze dvou přímek v $\mathbb{R}^2$, ovšem průnikem dvou různoběžných rovin je přímka (1 parametr) a splývání dvou rovin má řešení o 2 parametrech.

Vyšší dimenze pro jednoduchost vynecháváme, ale princip řešení je pořád stejný.

Obecný postup pro vzájemnou polohu podprostorů: spočítáme průnik sestavením soustavy a maticového schématu, v případě další diskuze o zaměření (mimoběžnost) závislost uvidíme ze schodového tvaru téhož schématu.

Doporučení: přímku (prostor menší dimenze) umístíme do schématu více vpravo, protože má jednodušší parametrické vyjádření a k tomu se dostaneme dříve (1 parametr, méně práce).

Příčka mimoběžek

Příčkou mimoběžných přímek rozumíme úsečku s krajními body na těchto přímkách.

Příček existuje nekonečně mnoho, proto zpravidla bývají určeny dalším bodem nebo směrovým vektorem.

Obecná strategie: z jedné mimoběžky a bodu/vektoru vygenerujeme tzv. řeznou rovinu. Ta protne druhou mimoběžku, čímž dostaneme jeden krajní bod. Z něj spustíme přímku ve směru příčky (známe další bod nebo směrový vektor) a dostaneme druhý krajní bod jako průsečík s první mimoběžkou.

Úloha se tedy převádí na úlohy a průsečících.

Je-li příčka zadána bodem, měli bychom zkontrolovat, zda leží uvnitř. Pokud ano, je konvexní kombinací průsečíků („obě závaží" jsou nezáporná). Pokud ne, zadání je nekorektní.

Pozor na výpočet parametru prvního průsečíku — co se hodí pro postup řeznou rovinou, nemusí se hodit pro postup po přímce.

Příklad na příčku I

Určete příčku mimoběžek $p : A + au, q : B + bv, A = [0, 1, -1], u = (1, 1, 0), B = [2, 1, 2], v = (1, -1, -1)$ procházející bodem $C = [2, 1, 0]$.

Řešení: Přidáním vektoru $\overrightarrow{AC} = C - A = (2, 0, 1)$ k zaměření přímky p dostaneme řeznou rovinu $\rho : A + au + c\overrightarrow{AC}$. Spočítáme $\rho \cap p$ ze soustavy $au + c\overrightarrow{AC} - bv = B - A$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array}\right)$$

Odtud $b = 1$, a tedy $\rho \cap p : B + v = [3, 0, 1]$. Označme tento průsečík Q, druhý nechť je P.

Příklad na příčku II

Vytvoříme vektor $\overrightarrow{QC} = C - Q = (-1, 1, -1)$ a spočítáme P jako průsečík p a $r : Q + d\overrightarrow{QC}$ ze soustavy $au - d\overrightarrow{QC} = Q - A$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 3 \\ 1 & -1 & | & -1 \\ 0 & 1 & | & 2 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

(To není štěstí, musely se protnout.) Dostáváme $d = 2$, tj. $P = Q + 2\overrightarrow{QC} = [1, 2, -1]$.

Protože jsme vektor $\overrightarrow{QC}$ museli vzít dvojnásobně, překročili jsme cestou k P bod C. Skutečně, $C = \frac{P+Q}{2}$, tedy C je konvexní kombinací a leží mezi P a Q.

Odpověď: Hledanou příčkou mimoběžek je množina $\{k[1, 2, -1] + (1 - k)[3, 0, 1] \mid k \in [0, 1]\}$.

Komentáře k afinní geometrii

- Pro afinní prostory máme afinní zobrazení. Možnosti transformací se rozšiřují hlavně o posunutí (translace), což v jazyce lineárních zobrazení nešlo.
- **Požadavky:** Porozumět afinním kombinacím, umět zapsat podprostor v parametrickém tvaru, generovat podprostor množinou bodů a vektorů, zapsat podprostor v parametrickém tvaru, spočítat součet a průnik podprostorů, interpretovat vzájemnou polohu podprostorů v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$, najít příčku mimoběžek.
- Úlohy je dobré umět řešit pro různé varianty zadání podprostorů (parametrické/obecné), nenaučit se jen jeden způsob a ztrácet čas zuřivými převody mezi vyjádřeními.

Obsah rovnoběžníku v $\mathbb{R}^2$

Determinant lze využít k výpočtu obsahu rovnoběžníku v rovině.

Postup: Strany rovnoběžníku popíšeme jako vektory se společným počátkem a (řádkově nebo sloupcově, je to jedno) zapíšeme do matice řádu 2. Determinantem matice je tzv. *orientovaný obsah*, tj. obsah až na znaménko. To bude mít další využití.

Trojúhelník sdílející 2 strany s rovnoběžníkem má poloviční obsah.

Příklad: Určete obsah trojúhelníku $ABC, A = [1, 4], B = [3, 2], C = [-1, 3]$.

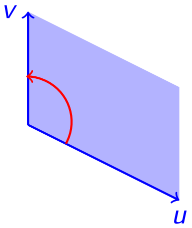
Řešení: Spočítáme $\overrightarrow{AB} = B - A = (2, -2)$, $\overrightarrow{AC} = C - A = (-2, -1)$.

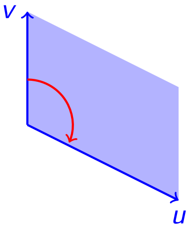
$$\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -6$$

Odpověď: Obsah trojúhelníku ABC je $|-6|/2 = 3$.

Znaménko determinantu

Znaménko odpovídá směru od prvního k druhému vektoru, tj. zda kratší z úhlů měříme v kladném smyslu (proti hodinám) nebo záporném (po směru hodinových ručiček):





$$\begin{vmatrix} u \\ v \end{vmatrix} > 0 \qquad \begin{vmatrix} v \\ u \end{vmatrix} < 0$$

Viditelnost I

Pomocí znaménka determinantu můžeme zjišťovat, zda bod leží vevnitř rovinného útvaru, případně které strany jsou viditelné.

Příklad: Určete, zda bod $X = [-1, 2]$ leží uvnitř trojúhelníku $ABC, A = [1, 2], B = [-4, 1], C = [-2, -1]$, případně které jeho strany jsou z X vidět.

Řešení: Připravíme si vektory $\overrightarrow{XA} = A - X = (2, 0), \overrightarrow{XB} = B - X = (-3, -1), \overrightarrow{XC} = C - X = (-1, -3)$.

Spočítáme determinanty:

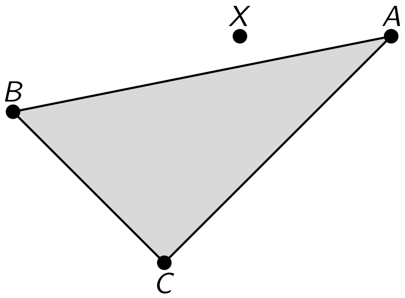
$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -2, \qquad \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 8, \qquad \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 6.$$

Obrázek k příkladu

Znaménka: $-, +, +$.

Interpretace: $\overrightarrow{XB}$ je vpravo od $\overrightarrow{XA}$, $\overrightarrow{XC}$ vlevo od $\overrightarrow{XB}$ a $\overrightarrow{XA}$ vlevo od $\overrightarrow{XC}$.

Odpověď: X leží vně trojúhelníka a vidíme z něj stranu AB.



Diskuze k viditelnosti

- Jsou-li všechny 3 determinanty kladné, bod leží uvnitř trojúhelníka a jeho vrcholy jsou popsány podle konvence.
- Jsou-li všechny 3 determinanty záporné, bod také leží uvnitř trojúhelníka, ale ten má vrcholy popsány proti konvenci.
- Jsou-li determinanty různých znamének, je vrchol vně trojúhelníka. Viditelné hrany jsou ty, kde se znaménko „liší od očekávání“.
- Determinant je nulový, pokud diskutované tři body leží v přímce.

Orientovaný objem rovnoběžnostěnu v $\mathbb{R}^3$

Podobně jako obsah počítáme objem o dimenzi výše, tj. sepíšeme 3 vektory do determinantu řádu 3.

Znaménko determinantu je kladné, pokud vektory „ctí pravidlo pravé ruky“.

Hranol s poloviční trojúhelníkovou podstavou má i poloviční objem.

„Špičatá“ tělesa (jehlan, kužel) mají třetinový objem k odpovídajícím tělesům s dvěma podstavami (hranol, válec).

Celkově je tak objem čtyřstěnu šestinový v poměru k rovnoběžníku, z něhož byl vyříznut.

Komentáře k determinantům v afinní geometrii

- Determinanty mají blízko k vektorovému součinu.
- V dimenzi 2 determinant souvisí se sinem úhlu (obsah je maximální pro pravý úhel a nulový pro vektory v přímce).
- Znaménka determinantů v $\mathbb{R}^3$ lze rovněž využít k posouzení viditelnosti stěn mnohostěnu z bodu.
- **Požadavky:** Umět počítat obsah/objem pomocí determinantu. Umět posoudit, zda je bod vevnitř nebo vně trojúhelníku, a které strany jsou případně vidět.

Skalární součin

Zobrazení $f : U \times V \to \mathbb{R}$ nazýváme *bilineární formou*, pokud je lineární v každé složce kartézského součinu, tj.

$$f(au+v,w) = af(u,w) + f(v,w), \quad f(u,bw+x) = bf(u,w) + f(u,x).$$

Pokud $U = V$ a f je navíc *pozitivní*, tj. $f(u,u) \geq 0$, přičemž $f(u,u) = 0$ jen pro $u = 0$, nazýváme f *skalárním součinem* na U.

Místo $f(u,v)$ píšeme $\langle u,v\rangle$ (neplést s generováním podprostoru).

V geometrických aplikacích si vystačíme jen s tzv. *standardním skalárním součinem* v $\mathbb{R}^n$:

$$\langle (x_1,x_2,\ldots,x_n),(y_1,y_2,\ldots,y_n)\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots x_ny_n.$$

Alternativně lze součin vyjádřit maticově:

$$\langle (x_1,x_2,\ldots,x_n),(y_1,y_2,\ldots,y_n)\rangle = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Velikost vektoru

Pokud se oba vstupy skalárního součinu rovnají, dostáváme

$$\langle (x_1, x_2, \dots, x_n), (x_1, x_2, \dots, x_n) \rangle = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2,$$

což je podle Pythagorovy věty druhá mocnina velikosti příslušného vektoru.

Zapisujeme

$$\|v\|^2 = \langle v, v \rangle,$$

tj.

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

Odchylka vektorů

Pro vektory konstantních velikostí je pro skalární součin *nejpříznivější* poloha, když jsou rovnoběžné, tj. závislé. Pak je absolutní hodnota součinu maximální. Skalární součin je nulový pro kolmé vektory. (Vše je tedy „přesně naopak“ oproti determinantu.)

Skalární součin souvisí s kosinem úhlu ϕ svíraným vektory:

$$\langle u, v\rangle = \|u\|\|v\| \cos\phi.$$

Úhlu ϕ říkáme *odchylka vektorů* u, v. Úpravou dostáváme vzorec

$$\cos\phi = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\|v\|}.$$

Kolmé vektory, ortogonální báze

Vektory u, v nazýváme *kolmé* a značíme $u \perp v$, pokud $\langle u, v \rangle = 0$.

Nulový vektor vždy nuluje skalární součin, je tak kolmý ke všem vektorům.

Množina všech vektorů, které jsou kolmé ke všem prvkům lineárního podprostoru P, je opět lineárním podprostorem. Nazývá se *ortogonálním doplňkem* podprostoru P a značí $P^{\perp}$.

Je-li hlavní prostor dimenze n, platí $\dim P + \dim P^{\perp} = n$, z ortogonálního doplňku tedy můžeme doplňovat bázi podprostoru na bázi celého prostoru.

Báze tvořená navzájem kolmými vektory se nazývá *ortogonální*.

Standardní báze je zřejmě ortogonální.

Každý prostor se skalárním součinem a každý jeho podprostor má ortogonální bázi.

Gramův–Schmidtův ortogonalizační proces I

Metoda algoritmicky nahrazuje obyčejnou bázi ortogonální bazí. Předvedeme si na příkladu.

Příklad: Najděte ortogonální bázi podprostoru $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$, $v_1 = (1,1,1,0)$, $v_2 = (1,0,2,0)$, $v_3 = (1,1,0,1)$ v $\mathbb{R}^4$.

Řešení: Hledanou ortogonální bázi označme (u_1, u_2, u_3).

1. krok: Položíme $u_1 = v_1$.

2. krok: Zkonstruujem u_2 „narovnáním“ v_2 do kolmého směru k u_1 v rovině dané u_1, v_2. Předpokládáme tedy $u_2 = v_2 + a u_1$ a spočítáme neznámý koeficient a. Skalárním vynásobením $\langle \, . \, , u_1 \rangle$ rovnice dostáváme

$$\begin{aligned} \langle u_2, u_1 \rangle &= \langle v_2 + a u_1, u_1 \rangle \\ 0 &= \langle v_2, u_1 \rangle + a \langle u_1, u_1 \rangle \end{aligned}$$

(Chceme, aby $u_2 \perp u_1$.)

Gramův–Schmidtův ortogonalizační proces II

Po dosazení vektorů dostáváme

$$
\begin{aligned}
0 &= \langle (1,0,2,0),(1,1,1,0)\rangle + a\langle (1,1,1,0),(1,1,1,0)\rangle \\
0 &= (1\cdot 1 + 0\cdot 1 + 2\cdot 1 + 0\cdot 0) + a(1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 0\cdot 0) \\
0 &= 3 + 3a
\end{aligned}
$$

Tedy $a = -1$ a $u_2 = v_2 - u_1 = (0,-1,1,0)$.

3. krok: Zkonstruujeme u_3 jako $v_3 + bu_1 + cu_2$ s požadavky $u_3 \perp u_1, u_3 \perp u_2$. Rovnici $u_3 = v_3 + bu_1 + cu_2$ postupně skalárně násobíme $\langle\ .\ , u_1\rangle$ a $\langle\ .\ , u_2\rangle$. Vznikne soustava dvou rovnic o dvou neznámých b, c. Protože jsme „chytře" řešili kolmost k u_2, u_3 (a ne k v_1, v_2) a ty už na sebe kolmé jsou, neznámé jsou separované a každou vypočítáme přímo z jedné rovnice:

Gramův–Schmidtův ortogonalizační proces III

$$\begin{aligned}
\langle u_3, u_1\rangle &= \langle v_3, u_1\rangle + b\langle u_1, u_1\rangle + c\langle u_2, u_1\rangle \\
0 &= \langle (1,1,0,1),(1,1,1,0)\rangle + b\langle (1,1,1,0),(1,1,1,0)\rangle + 0 \\
0 &= 2 + 3b \\
\langle u_3, u_2\rangle &= \langle v_3, u_2\rangle + b\langle u_1, u_2\rangle + c\langle u_2, u_2\rangle \\
0 &= \langle (1,1,0,1),(0,-1,1,0)\rangle + 0 + c\langle (0,-1,1,0),(0,-1,1,0)\rangle \\
0 &= -1 + 2c
\end{aligned}$$

Dostáváme $b = -2/3, c = 1/2$, a tedy
$u_3 = (1,1,0,1) - \frac{2}{3}(1,1,1,0) + \frac{1}{2}(0,-1,1,0) =$
$(1/3, -1/6, -1/6, 1) \sim (2, -1, -1, 6)$

Zkouška: Prověříme ortogonalitu vektorů u_1, u_2, u_3.

Výpočet ortogonálního doplňku

Vektory kolmé na danou množinu vektorů jsou vlastně řešení homogenní soustavy rovnic.

Zkušený počtář dokáže vektory doplňku v nižších dimenzích „vidět“.

Příklad: Najděte ortogonální doplněk v $\mathbb{R}^3$ podprostoru P generovaného vektory $u = (1, 1, 2), v = (-1, 0, 1)$.

Řešení: Dimenze doplňku by měla být 1, stačí nám tedy najít jeden (nenulový) vektor $w = (x, y, z)$ splňující $w \perp u, w \perp v$, tj. $\langle w, u\rangle = 0, \langle w, v\rangle = 0$. Dostáváme homogenní soustavu

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 0 \\ -x + z &= 0 \end{aligned}$$

Řešením je např. $x = 1, z = 1, y = -3$, tj. $w = (1, -3, 1)$, $P^\perp = \langle w\rangle$.

Vzdálenost afinních podprostorů

Vzdáleností dvou geometrických útvarů vždy rozumíme minimum vzdáleností bodů z jednoho a druhého útvaru:

$$d(X, Y) = \min\{d(A, B) \mid A \in X, B \in Y\}.$$

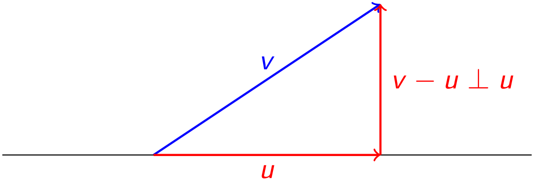
Známe-li body A, B, vzdálenost určíme jako velikost vektoru $\overrightarrow{AB}$.

Vzdálenost afinních podprostorů se vždy realizuje v kolmém směru na oba podprostory, tj. v ortogonálním doplňku k součtu zaměření prostorů.

Vzdáleností se zabýváme např. pro:

- bod a přímku v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$,
- bod a rovinu v $\mathbb{R}^3$,
- rovnoběžky v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$,
- rovnoběžné roviny v $\mathbb{R}^3$,
- rovnoběžnou přímku a rovinu v $\mathbb{R}^3$, atp.

Projekce vektoru a vzdálenost bodu od podprostoru



Vektor u nazýváme projekcí vektoru v do daného podprostoru.

V řadě úloh nás spíš zajímá doplňková výška $v - u$, v níž se realizuje vzdálenost koncového bodu vektoru od podprostoru.

Vektor u se obvykle snažíme vyjádřit jako kombinaci vektorů definujících podprostor a hledáme koeficienty, pro něž bude vektor $v - u$ kolmý.

Využijeme tedy skalární součin s $v - u$ a sestavíme a vyřešíme homogenní soustavu rovnic.

Příklad na vzdálenost bodu od přímky

Určete vzdálenost bodu $A = [4,3]$ od přímky $p : [1,2] + a(1,-1)$.

Řešení: Označme $B = [1,2], u = (1,-1)$,
$v = \overrightarrow{AB} = [1,2] - [4,3] = (-3,-1)$.

$$\begin{aligned} \langle u, v - au \rangle &= \langle u, v \rangle - a\langle u, u \rangle \\ 0 &= -2 - 2a \end{aligned}$$

Odtud $a = -1$ a $\|v - au\| = \|(-2,-2)\| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$.

Odpověď: Vzdálenost A od p je $d(A,p) = 2\sqrt{2}$.

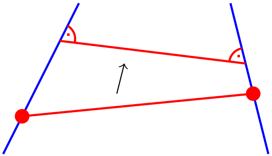
Osa mimoběžek

Osou mimoběžných přímek v $\mathbb{R}^3$ rozumíme jejich příčku nejkratší délky.

Už víme, že se realizuje ve směru kolmém na obě mimoběžky.

To samo o sobě stačí k řešení (varianta úlohy o příčce se směrovým vektorem).

Osu lze ovšem najít i o něco jednodušeji — můžeme promítnout jakoukoli příčku do směru osy a určit velikost průmětu.



Příklad na osu mimoběžek

Určete vzdálenost mimoběžek $p : A + au$ a $q : B + bv$, kde $A = [-2, 1, 2]$, $u = (1, 1, 1)$, $B = [0, 2, 2]$, $v = (1, 0, 1)$, a najděte body C, D, v nichž se realizuje.

Řešení: Vektor $\overrightarrow{AB} = (2, 1, 0)$ promítáme na vektor $\overrightarrow{CD}$, přičemž $\overrightarrow{CD} \perp u$, $\overrightarrow{CD} \perp v$. Současně nás zajímají parametry a, b, pro něž $C = A + au$ a $D = B + bv$. Pak $\overrightarrow{AB} = au + \overrightarrow{CD} - bv$ a $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} - au + bv$. Skalárním násobením s u, v dostáváme rovnice

$$\begin{aligned}
\langle \overrightarrow{AB} - au + bv, u \rangle &= \langle \overrightarrow{AB}, u \rangle - a\langle u, u \rangle + b\langle v, u \rangle \\
\langle \overrightarrow{AB} - au + bv, v \rangle &= \langle \overrightarrow{AB}, v \rangle - a\langle u, v \rangle + b\langle v, v \rangle \\
0 &= 3 - 3a + 2b \\
0 &= 2 - 2a + 2b
\end{aligned}$$

Odtud již máme $a = 1, b = 0, C = [-1, 2, 3], D = [0, 2, 2], \|\overrightarrow{CD}\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$, což je hledaná vzdálenost.

Odchylka podprostorů

Odchylkou podprostorů rozumíme nejmenší z úhlů, který svírají nenulové vektory jejich zaměření. (Posunutí afinních prostorů posunutí nehraje žádnou roli.)

Odchylka přímek (různoběžek) je jednoduchá — musíme dát pozor na volbu menšího ze dvou úhlů, což lze vyjádřit absolutní hodnotou součinu ve vzorci

$$\cos\phi = \frac{|\langle u, v\rangle|}{\|u\|\|v\|},$$

kde u, v jsou směrové vektory přímek.

U odchylky přímky a roviny potřebujeme zjistit kolmý průmět přímky do roviny, následně řešíme jako odchylku přímek.

Odchylka dvou rovin by byla nejsložitejší, ale v $\mathbb{R}^3$ si pomůžeme trikem s normálovými vektory: odchylka rovin se rovná odchylce normálových vektorů.

Komentáře k eukleidovské geometrii

- Eukleidovskou geometrií je míněna afinní geometrie obohacená skalárním součinem na zaměření prostoru.
- „Exotické“ skalární součiny: $\mathrm{tr}(AB^T)$ v reálných čtvercových maticích, $\int_a^b f(x)g(x)dx$ v polynomech.
- V komplexních prostorech se v jedné složce skalárního součinu při „vytýkání“ musí vzít komplexně sdružený skalár.
- Na vzdálenost bodu od podprostoru existuje přímý vzorec (SŠ, neučíme, tolerujeme).
- **Požadavky:** Umět počítat standardní skalární součin v $\mathbb{R}^n$, odchylku vektorů, velikost vektoru, ortogonální bázi, ortogonální doplněk, projekci vektoru do roviny, vzdálenost dvou afinních prostorů, osu mimoběžek, odchylku podprostorů.