

MB141 – 1. přednáška

Geometrie v rovině

Martin Čadek
s využitím přednášky Ondřeje Klímy pro předmět MB101

Jarní semestr 2022

Motivace. V předmětu MB141 se postupně naučíme

- řešit soustavy lineárních rovnic,
- pracovat s maticemi,
- řešit geometrické úlohy v rovině a v prostoru (uplatnění v počítačové grafice),
- popisovat pomocí matic některé procesy (růst populací, Markovovy procesy),
- jak se teorie čísel používá v kryptografii s veřejným klíčem.


- Afinní geometrie
- Eukleidovská geometrie
- Orientace, viditelnost, obsah a determinant

Motivace: chceme umět

- počítat s body a přímkami,
- měřit vzdálenosti a úhly, počítat obsahy rovinných útvarů,
- pracovat s přirozenými transformací roviny jako je otočení kolem bodu a reflexe podle přímky.





Základními objekty budou pro nás


- body,
- vektory.

Vektory jsou zadány uspořádanou dvojicí bodů \overrightarrow{AB} , bod A je počáteční, bod B je koncový. Uspořádané dvojice \overrightarrow{AB} a \overrightarrow{CD} určují stejný vektor \vec{u} , jestliže vhodným posunutím převedeme orientovanou úsečku \overrightarrow{AB} na orientovanou úsečku \overrightarrow{CD} . 

Počítání s vektory a body

Vektory \vec{u} , \vec{v} můžeme

- **sčítat**: $\vec{u} + \vec{v}$ dostaneme pomocí rovnoběžníkového pravidla, 
- **násobit reálným číslem** $a \in \mathbb{R}$, $a\vec{u}$, 
- **nulový vektor** $\vec{0}$ je reprezentován \overrightarrow{AA} , **opačný vektor** k $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ je $-\vec{u} = \overrightarrow{BA}$. 
- Kombinací násobení a sčítání dostaneme lineární kombinaci vektorů $a\vec{u} + b\vec{v}$. 

K libovolnému **bodu** A můžeme **přičíst vektor** \vec{u} . Výsledkem této operace $A + \vec{u}$ je bod B , který je koncovým bodem reprezentace vektoru \vec{u} pomocí orientované úsečky \overrightarrow{AB} . 

Počítání s body a vektory provádíme pomocí souřadnic.

Souřadný systém

Souřadný systém je určen

- počátkem v bodě P ,
- dvěma nenulovými vektory \vec{e}_1, \vec{e}_2 umístěnými do bodu P , které neleží v jedné přímce.

Pro každý bod B v rovině souřadný systém zadává

- reálná čísla x a y taková, že $B = P + x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$. ▶▶

Dvojici reálných čísel $[x, y]$ (v hranatých závorkách) nazýváme **souřadnicemi bodu** B v souřadném systému $(P, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Jestliže je vektor $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ a souřadnice bodů A a B jsou postupně $[x_1, y_1]$ a $[x_2, y_2]$, pak **souřadnicemi vektoru** \vec{u} je dvojice reálných čísel $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ (v kulatých závorkách). Uvědomte si, že nezáleží na tom, kterými dvěma body vektor \vec{u} reprezentujeme. ▶▶

Body (a rovněž vektory) v rovině reprezentujeme tedy jako uspořádané dvojice reálných čísel, tj. prvky množiny \mathbb{R}^2 .

Každý bod přímky p procházející bodem A se směrovým vektorem $\vec{u} \neq \vec{0}$ napíšeme jako

$$X = A + t\vec{u}$$


pro nějaké reálné číslo t . To je **parametrická rovnice přímky p** .
V souřadnicích

$$[x, y] = [a_x, a_y] + t(u_x, u_y),$$

což lze rozepsat po složkách

$$x = a_x + tu_x,$$

$$y = a_y + tu_y.$$

Je-li $u_x \neq 0$, spočteme z první rovnice parametr t a dosadíme do druhé rovnice. Po vynásobení u_x , dostaneme tzv. **obecnou (nebo implicitní) rovnici přímky** 

$$-u_yx + u_xy + (a_yu_x - a_xu_y) = 0,$$

$$px + qy + r = 0.$$

Afinní a konvexní kombinace bodů

Přímka určená body A a B , $A \neq B$, má směrový vektor $\vec{u} = \vec{AB}$.
Její parametrický popis je proto

$$A + t\vec{u} = A + t(B - A) = A + tB - tA = (1 - t)A + tB.$$

Tato kombinace je tvaru $\alpha A + \beta B$, kde $\alpha + \beta = 1$. Nazýváme ji **afinní kombinací bodů** A a B . Bod $X = (1 - t)A + tB$ leží

- na úsečce AB , právě když $t \in [0, 1]$, ▶▶
- na polopřímce opačné k polopřímce \vec{AB} , právě když $t \leq 0$,
- na polopřímce opačné k polopřímce \vec{BA} , právě když $t \geq 1$.

Kombinaci bodů $(1 - t)A + tB$ pro $t \in [0, 1]$ nazýváme **konvexní kombinací bodů** A a B . Důvodem je definice **konvexní množiny**: Podmnožina roviny je konvexní, jestliže s každými dvěma body A a B v ní leží všechny body úsečky AB , tedy všechny jejich konvexní kombinace.

Afinní kombinace tří bodů v rovině

Nechť A , B a C jsou body v rovině, které neleží v jedné přímce. Pak lze každý bod X roviny psát ve tvaru

$$X = A + t\vec{BA} + s\vec{CA} = A + t(B-A) + s(C-A) = (1-t-s)A + tB + sC.$$

Tato kombinace $\alpha A + \beta B + \gamma C$, kde $\alpha + \beta + \gamma = 1$, se nazývá **afinní kombinace bodů** A , B a C .

Lze ukázat, že tato afinní kombinace leží v trojúhelníku ABC , právě když $\alpha, \beta, \gamma \in [0, 1]$. Takovouto afinní kombinaci nazýváme **konvexní kombinací tří bodů**.

Příklad

Dokažte, že se těžnice v trojúhelníku ABC protínají v jediném bodě.

Střed strany $a = BC$ je afinní kombinace $\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C$. Těžnice na stranu a procházející bodem A a středem strany a má tedy afinní vyjádření



Těžnice v trojúhelníku

$$t_a: (1-t)A + t\left(\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C\right) = (1-t)A + \frac{t}{2}B + \frac{t}{2}C.$$

Analogicky těžnice na stranu $b = AC$ je

$$t_b: (1-s)B + s\left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}C\right) = (1-s)B + \frac{s}{2}A + \frac{s}{2}C.$$

Průnik těchto přímk je určen parametry t a s splňujícími rovnicí

$$(1-t)A + \frac{t}{2}B + \frac{t}{2}C = (1-s)B + \frac{s}{2}A + \frac{s}{2}C.$$

Koeficienty u jednotlivých bodů musí být stejné, neboť afinní kombinace pro daný bod je dána jednoznačně. Dostáváme tedy soustavu:

$$1-t = \frac{s}{2}, \quad \frac{t}{2} = 1-s, \quad \frac{t}{2} = \frac{s}{2}.$$

Těžnice v trojúhelníku – dokončení

Její řešení je $t = s = 2/3$. Průnikem těžnic t_a a t_b je bod

$$T = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C.$$

Nyní stačí ověřit, že tento bod leží i na třetí těžnici t_c zadané afinní kombinací

$$(1 - r)C + \frac{r}{2}A + \frac{r}{2}B.$$

Bod T nazýváme těžištěm trojúhelníku ABC .

Příklad

Určete průnik (průsečík) přímk $p : x + 2y = 200$ a $q : 2x - 9y = 10$.

- Obě přímky zadané obecnou rovnicí : řešíme soustavu. ▶▶
- Jedna přímka obecně, jedna parametricky : dosadíme.
- Obě přímky zadané parametricky : sestaví se soustava a vyřeší. Viz. průnik těžnic.


- Musí průsečík existovat?
-

$$ax + by = r$$

$$cx + dy = s.$$

Ekvivalentně:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$$

- Eliminací x dostaneme rovnici $(ad - bc)y = as - cr$, tj. záleží, zda $ad - bc = 0$. 

Definice

Pro matici $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ nazýváme hodnotu $ad - bc$ **determinant**.

Skalární součin vektorů (Eukleidovská geometrie)

Definice

Pro dvojici vektorů $u = (a, b)$ a $v = (c, d)$ definujeme

$$\langle u, v \rangle = ac + bd,$$

tzv. **skalární součin vektorů**.

Definice

Velikost vektoru $u = (a, b)$ je $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Pomocí skalárního součinu můžeme počítat odchylky vektorů. Jestliže jsou vektory $u = (a, b)$ a $v = (c, d)$ na sebe kolmé, pak podle Pythagorovy věty je $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$. Výpočtem podle definice dostaneme $ac + bd = 0$, tedy $\langle u, v \rangle = 0$. ▶▶

Odchyly vektorů a přímek

- Vektory u a v jsou kolmé, právě když $\langle u, v \rangle = 0$.
Píšeme $u \perp v$.
- Příklad: směrový vektor přímky $ax + by + c = 0$ je $(-b, a)$,
normálový (a, b) . ▶▶
- Pro dvojici vektorů u a v se jejich odchylka spočítá pomocí
vztahu

$$\cos \alpha = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}, \quad \alpha \in [0, \pi].$$

- Rozlišujeme odchylku vektorů a přímek. Pro přímky:

$$\cos \alpha = \frac{|\langle u, v \rangle|}{\|u\| \cdot \|v\|} \quad \alpha \in [0, \pi/2].$$

- "Zdůvodnění": Odchylka vektorů $u = (r \cos \alpha, r \sin \alpha)$ a
 $v = (c, 0)$ je evidentně α , což odpovídá vzorci se
skalárním součinem, neboť

$$\langle u, v \rangle = r \cos \alpha \cdot c + r \sin \alpha \cdot 0 = \|u\| \|v\| \cos \alpha.$$

Mějme uspořádanou dvojici nenulových vektorů (\vec{u}, \vec{v}) , kde jeden není násobkem druhého. Řekneme, že tato dvojice je

- **orientovaná kladně**, jestliže jejich odchylka α měřená od prvního vektoru k druhému proti směru hodinových ručiček je kladná, tj. v intervalu $(0, \pi)$, ▶▶
- **orientovaná záporně**, jestliže jejich odchylka α měřená od prvního vektoru k druhému proti směru hodinových ručiček je záporná, tj. leží v intervalu $(-\pi, 0)$.

Lze ukázat, že orientaci lze počítat pomocí determinantu takto: Jsou-li $\vec{u} = (a, b)$ a $\vec{v} = (c, d)$, pak dvojice (\vec{u}, \vec{v}) je

- orientována kladně, právě když

$$\det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = ad - bc > 0, \quad \text{▶▶}$$

- orientována záporně, právě když

$$\det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = ad - bc < 0. \quad \text{▶▶}$$

- Pro přímku p a bod X nám orientace (znaménko determinant) poskytuje nástroj, jak rozhodnout, v které polorovině určené přímkou p se bod X nalézá. ▶▶
- Necht' p je orientovaná směrovým vektorem \vec{AB} . Vektory \vec{AB} a \vec{AX} dáme do sloupců matice. Pokud je determinant kladný, je bod X „nalevo od vektoru“ \vec{AB} . Pokud je determinant záporný je bod „napravo“.

Pozn.: Nezáleží zda do řádků nebo sloupců. Důležité je pořadí vektorů.

Příklad

Jsou dány následující body: $A = [10, -4]$, $B = [18, 6]$,
 $C = [25, 18]$, $P = [14, 14]$ a $R = [15, 3]$.

Rozhodněte, které strany a vrcholy $\triangle ABC$ jsou vidět z bodu P .
Rozhodněte, zda je bod R uvnitř $\triangle ABC$.

Příklad

$$A = [10, -4], B = [18, 6], C = [25, 18], R = [15, 3].$$

- Z obrázku (nebo zadání) určíme v jakém pořadí jsou vrcholy označeny. (Pozn. když to není zřejmé z obrázku, musíme použít determinant.)

- Zde $\vec{AB} = B - A = (8, 10)$, $\vec{AC} = C - A = (15, 22)$,

$$\det \begin{pmatrix} 8 & 15 \\ 10 & 22 \end{pmatrix} = 8 \cdot 22 - 10 \cdot 15 > 0.$$

Bod C je nalevo od polopřímky AB . Pořadí vrcholů - kladný směr.

- Určíme $\vec{AB} = B - A = (8, 10)$, $\vec{AR} = R - A = (5, 7)$,

$$\det \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 10 & 7 \end{pmatrix} = 8 \cdot 7 - 10 \cdot 5 > 0.$$

Bod R je nalevo od polopřímky AB .

Příklad

$$A = [10, -4], B = [18, 6], C = [25, 18], R = [15, 3].$$

- Dále $\vec{BC} = C - B = (7, 12)$, $\vec{BR} = R - B = (-3, -3)$,

$$\det \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 12 & -3 \end{pmatrix} = 7 \cdot (-3) - 12 \cdot (-3) > 0.$$

Bod R je nalevo od polopřímky BC .

- Konečně $\vec{CA} = A - C = (-15, -22)$,

$$\vec{CR} = R - C = (-10, -15),$$

$$\det \begin{pmatrix} -15 & -10 \\ -22 & -15 \end{pmatrix} = 15 \cdot 15 - 22 \cdot 10 > 0.$$

Bod R je nalevo od polopřímky CA .

- Závěr: bod R je vnitř $\triangle ABC$.
- Viditelnost z bodu P – stejný postup.



Orientovaný obsah rovnoběžníku

Uvažujme rovnoběžník s vrcholy P , $P + \vec{u}$, $P + \vec{v}$ a $P + \vec{u} + \vec{v}$. Obsah tohoto rovnoběžníku závisí pouze na vektorech \vec{u} a \vec{v} , nikoliv na bodu P . Zavedeme pojem **orientovaného obsahu rovnoběžníku** zadaného uspořádanou dvojicí vektorů (\vec{u}, \vec{v}) , označení $S(\vec{u}, \vec{v})$. Naše představa je, že $S(\vec{u}, \vec{v})$ je

- 0, jestliže rovnoběžník zdegeneruje na úsečku,
- obsah rovnoběžníku, je-li dvojice (\vec{u}, \vec{v}) orientována kladně,
- obsah rovnoběžníku vynásobený číslem -1 , je-li dvojice (\vec{u}, \vec{v}) orientována záporně.

Pak $S(\vec{u}, \vec{v})$ splňuje tato pravidla:

- 1) $S((1, 0), (0, 1)) = 1$,
- 2) $S(\vec{u}, \vec{v}) = -S(\vec{v}, \vec{u})$,
- 3) $S(a\vec{u}, \vec{v}) = aS(\vec{u}, \vec{v})$ a $S(\vec{u}, a\vec{v}) = aS(\vec{u}, \vec{v})$,
- 4) $S(\vec{u} + \vec{w}, \vec{v}) = S(\vec{u}, \vec{v}) + S(\vec{w}, \vec{v})$.



Věta

Orientovaný obsah rovnoběžníku určeného uspořádanou dvojicí vektorů $\vec{u} = (a, b)$ a $\vec{v} = (c, d)$ je

$$S(\vec{u}, \vec{v}) = \det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

Označme $\vec{e}_1 = (1, 0)$ a $\vec{e}_2 = (0, 1)$. Pak $\vec{u} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$ a $\vec{v} = c\vec{e}_1 + d\vec{e}_2$. Při využívání pravidel 1) až 4) dostáváme

$$\begin{aligned} S(\vec{u}, \vec{v}) &= S(a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2, c\vec{e}_1 + d\vec{e}_2) \\ &= aS(\vec{e}_1, c\vec{e}_1 + d\vec{e}_2) + bS(\vec{e}_2, c\vec{e}_1 + d\vec{e}_2) \\ &= acS(\vec{e}_1, \vec{e}_1) + adS(\vec{e}_1, \vec{e}_2) + bcS(\vec{e}_2, \vec{e}_1) + bdS(\vec{e}_2, \vec{e}_2) \\ &= adS(\vec{e}_1, \vec{e}_2) - bcS(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = ad - bc \end{aligned}$$

Obsah rovnoběžníku zadaného vektory u a v je

$$S = \left| \det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \right|.$$

Příklad

Mějme body $A = [1, 1]$, $B = [7, 2]$, $C = [5, 5]$.
Určete obsah $\triangle ABC$.

Obsah $\triangle ABC$ je tedy $\frac{1}{2} |S(\vec{AB}, \vec{AC})| = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \right| = 10$.

- Příklady s přímkami — průsečíky, úlohy s časem.
- Velikosti úseček a úhlů.
- Obsahy n -úhelníků.
- Úlohy na viditelnost.
(Včetně polohy bodu vně/uvnitř.)

Příklad (1.1)

V rovině \mathbb{R}^2 uvažujeme pravidelný dvanáctiúhelník $A_1A_2 \dots A_{12}$, který je vepsán do kružnice s poloměrem 2, se středem $S = [0, 0]$ v počátku a vrcholem $A_1 = [2, 0]$. Přitom vrcholy dvanáctiúhelníku $A_1A_2 \dots A_{12}$ jsou číslovány v kladném směru, tj. vrchol A_2 má obě souřadnice kladné.

- i) Určete souřadnice vrcholu A_2 .
- ii) Určete obsah dvanáctiúhelníku $A_1A_2 \dots A_{12}$.
- iii) Určete obsah trojúhelníku $A_2A_5A_8$.
- iv) Určete velikost úhlu, který svírají úhlopříčky A_2A_5 a A_2A_8 .
- v) Určete průsečík přímk A_2A_9 a A_1A_7 .

Příklad (1.2)

V rovině jsou dány body $A = [1, 2]$, $B = [3, 9]$, $C = [2, 13]$, $D = [0, 10]$, $E = [5, -1]$ a $F = [3, 1]$. Určete, zda je $ABCD$, resp. $ABEF$, konvexní čtyřúhelník. Určete, zda bod $X = [2, 7]$ resp. $Y = [4, 15]$ leží uvnitř nebo vně tohoto čtyřúhelníku a rozhodněte, které strany konvexního čtyřúhelníku jsou vidět z bodu, který je vně.

Příklad (1.3)

Máme kulečnickový stůl o rozměrech 200×100 , tj. „levý dolní roh“ má souřadnice $[0, 0]$ a „pravý horní roh“ má souřadnice $[200, 100]$. Ze středu $[100, 50]$ vyšlu kouli do bodu $[160, 100]$. Do kterého bodu (po dvou odrazech) dopadne koule na „spodní hraně“?