5. přednáška

Příklad na průnik podprostorů

$V = \mathbb{R}_4[x]$

$P = \{ f \in \mathbb{R}_4[x] \,, \forall c \;\; f(c) = f(-c) \}$

sudé polynomy

$Q = [x^3 - x + 1,\; 2x^3 + x^2 - 2x,\; x^4 + x^3 - x,$
$x^4 - x^2 + 1]$

Minule jsme pro Q našli bázi

$\underbrace{x^3 - x + 1}_{v_1},\; \underbrace{2x^3 + x^2 - 2x}_{v_2},\; \underbrace{x^4 + x^3 - x}_{v_3}$

Chceme najít bázi průniku

Báze podprostoru P

$p(x) = a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 =$

$= a_4 x^4 - a_3 x^3 + a_2 x^2 - a_1 x + a_0$
$= p(-x)$

$x^4 : \quad a_4 = a_4$

$x^3 : \quad a_3 = -a_3 \quad \Rightarrow \quad a_3 = 0$

$x^2 : \quad a_2 = a_2$

$x^1 : \quad a_1 = -a_1 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 0$

$1 = x^0 : \quad a_0 = a_0$

$P = \{ a_4 x^4 + a_2 x^2 + a_0 \}$
$= [x^4, x^2, 1]$

Počítáme průnik

$P \cap Q = \{ p(x) = a x^4 + b x^2 + c =$

$= p v_1 + q v_2 + s v_3 \}$

Neznámé a, b, c, p, q, r

x^4 $\quad a + 0b + 0c = r$

x^3

x^2

$\vdots$

1

Zápis

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc|ccc} a & b & c & p & q & r \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

V podstatě jde o hom. soustavu rovnic

$$\sim \dots \sim \quad \begin{array}{c} \begin{array}{ccc|ccc} a & b & c & p & q & r \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

Stačí spočítat p, q, r

q a r volíme za parametry $\in \mathbb{R}$

Spočítáme p

$$0 = p + 2q + r$$

$$p = -2q + r$$

$$P \cap Q = \{ p(x) = (-2q - r) v_1 + q v_2 + r v_3$$

$$= (-2q - r)(x^3 - x + 1) + q(2x^3 + x^2 - 2x)$$

$$+ r(x^4+x^3-x) =$$

$$= q(-2x^3+2x-2+2x^3+x^2-2x) + r(-x^3+x-1+x^4+x^3-x)$$

$$= q(x^2-2) + r(x^4-1)$$

$$= [x^2-2,\ x^4-1]$$

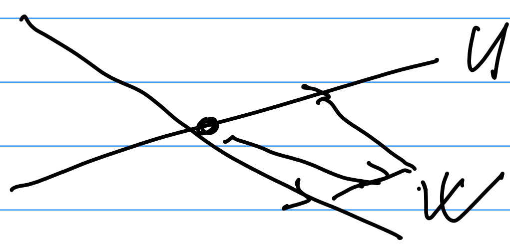
Báze průniku je
$(x^2-2,\ x^4-1)$.

Součet podprostorů

V prostor $U, W \subseteq V$ podprostory

$U \cup W$ NENÍ podprostor

$V = \mathbb{R}^2$



$$U + W = \{u + w \in V,\ u \in U, w \in W\}$$

Vraťme se k příkladu

$P = [x^4, x^2, 1]$ $Q = [v_1, v_2, v_3]$

$P + Q = [x^4, x^2, 1, v_1, v_2, v_3]$

Z těchto polynomů stačí vybrat maximální seznam lineárně nezávislých vektorů.

Z výpočtu výše uvedených plyne, že hledaný seznam je $\underline{x^4, x^2, 1, v_1 = x^3 - x + 1}$.

Možnost kontroly správnosti výpočtu je vzorec pro dimenze: $U, W \subseteq V$

$$\boxed{\dim U + \dim W = \dim(U+W) + \dim(U \cap W)}$$

$$\dim P + \dim Q = \dim(P+Q) + \dim(U \cap W)$$

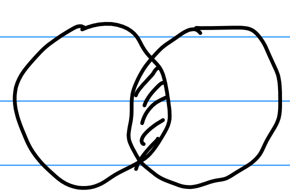
$$3 + 3 = 4 + 2$$

$$\dim \mathbb{R}_4[x] = 5$$

Analogie se střední školou:

Konečné množiny $A, B \subseteq C$, $|A|, |B|$ počty prvků

$$|A| + |B| = |A \cup B| + |A \cap B|$$



LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ

Zobrazení $\varphi : U \to V$ mezi dvěma vekt. prostory se nazývá LINEÁRNÍ (homomorfismus vekt. prostorů), jestliže platí

1) $\forall u_1, u_2 \in U \quad \varphi(u_1 + u_2) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2)$
2) $\forall a \in \mathbb{R} \ \forall u \in U \quad \varphi(au) = a\varphi(u)$

Lze napsat jedinou podmínkou

$$\varphi(au_1 + bu_2) = a\varphi(u_1) + b\varphi(u_2)$$

Příklady $\quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

- $\varphi(x,y) = xy$ není lin.

$\varphi(3(x,y)) = \varphi(3x, 3y) = 3x \cdot 3y =$
$= 9xy \neq 3xy = 3\varphi(x,y)$
$x \neq 0, y \neq 0$

- $\varphi(x,y) = x^2 + 3y$ není lin.

$\varphi(2,1) = 4 + 3 = 7$

$\varphi(2(2,1)) = \varphi(4,2) = 16 + 6 = 22$
$2\varphi(2,1) = 2 \cdot 7 = 14$

- $\varphi(x,y) = 3x+1$ není lin.

$$\varphi(1,0) = 3+1 = 4$$

$$\varphi(2,1) = 6+1 = 7$$

$$\varphi(3,1) = 9+1 = 10$$

$$\varphi(1,0) + \varphi(2,1) = 4+7 = 11 \neq 10 = \varphi(3,1)$$

- $\varphi(x,y) = ax + by$

$$\varphi(x,y) = (a, b)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$

A je matice $k \times n$

$$\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots \\ \dots\dots \\ a_{k1}x_1 + \dots \end{pmatrix}$$

A je matice $k \times n$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x \quad \text{je matice } n \times 1$$

Ax je matice $k \times 1$

$\boxed{\varphi(x) = Ax \quad \varphi \text{ je lineární}}$ Důležité!

$$\varphi(x+y) = A(x+y) = Ax + Ay = \varphi(x) + \varphi(y)$$

$$\varphi(cx) = A(cx) = c(Ax) = c\,\varphi(x)$$

Věta: Každé lin. zobrazení
$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$
lze ve stand. souřadnicích psát jako násobení maticí
$$\varphi(x) = Ax \quad A \ k \times n$$

Lin. zobrazení je zjednodušené vyjádření hodnotami na vektorech nějaké báze.

Příklad $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$\varphi\underset{v_1}{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} \quad \varphi\underset{v_2}{\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}5\\8\end{pmatrix} \quad \varphi\underset{v_3}{\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}$$

Najděte matici A typu 2×3 tak, že

$$\varphi(x) = Ax.$$

Stand. báze $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ $e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$\varphi(e_1) = Ae_1 =$ 1. sloupec matice A

$= s_1(A)$

$\varphi(e_2) = Ae_2 = s_2(A)$

$\varphi(e_3) = Ae_3 = s_2(A)$

Tedy určení matice značí najít hodnoty φ na vektorech stand. báze.

Mohli: vyjádřit

$$e_1 = \underline{a}\, v_1 + \underline{b}\, v_2 + \underline{c}\, v_3$$

$$Ae_1 = A(av_1 + bv_2 + cv_3)$$
$$= a\,\varphi(v_1) + b\,\varphi(v_2) + c\,\varphi(v_3)$$

! Lépe a rychleji následujícím algoritmem !

Vektory napíšeme do řádku

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} u & \varphi(u) \end{array} \\
\left(\begin{array}{c|c} v_1 & \varphi(v_1) \\ v_2 & \varphi(v_2) \\ v_3 & \varphi(v_3) \end{array}\right)
\end{array}
\underset{\text{úpravy}}{\overset{\text{řádk.}}{\sim}}
\left(\begin{array}{c|c} v_1 & \varphi(v_1) \\ v_1+v_2 & \varphi(v_1)+\varphi(v_2) \\ c\,v_3 & c\,\varphi(v_3) \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{c|c} v_1 & \varphi(v_1) \\ v_1+v_2 & \varphi(v_1+v_2) \\ c\,v_3 & \varphi(c\,v_3) \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{c|c} e_1 & \varphi(e_1) \\ e_2 & \varphi(e_2) \\ e_3 & \varphi(e_3) \end{array}\right)$$

sloupce matice A v řádcích

$$\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array}
\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 5 & 9 \\ 1 & 1 & 2 & 5 & 7 \end{array}\right)
\sim \dots
\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)
\begin{array}{l} \to \text{1. sloupec matice A} \\ \to \text{2. sloupec matice A} \\ \to \text{3. sloupec matice A} \end{array}$$

Matice A bude

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

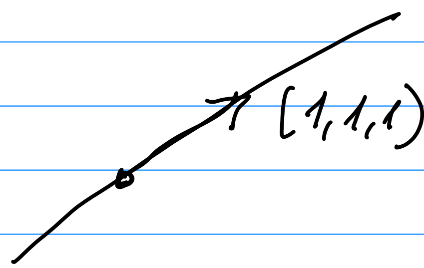
$$\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Příklad $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

symetrie podle přímky procházející počátkem se směrovým vektorem $(1,1,1)$.

Najděte matici A 3×3 tak, že
$$\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Symetrie podle přímky



$$\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$(1,-1,0)$ je kolmý na $(1,1,1)$

$$\langle (1,-1,0),(1,1,1) \rangle = 1-1+0 = 0$$

$$\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$ opačný vektor

Jiný lin. nezávislý kolmý vektor je např. $(0,1,-1)$

$$\varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nyní postupujeme stejně jako v předchozím

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \dots$$

$$\sim \dots \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{array}\right)$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Vlastní čísla a vlastní vektory lin. zobrazení

Předchozí příklad

Symetrie podle přímky

$\exists\, u$ vektor $\qquad \varphi(u) = u = 1 \cdot u$

$\exists\, v$ vektor $\qquad \varphi(v) = -v = (-1)\, v$

$$\underline{\varphi(\vec{0})} = \varphi(0 \cdot u) = 0 \cdot \varphi(u) = \underline{\vec{0}}$$

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \varphi(a \cdot \vec{0}) = a \cdot \vec{0} = \vec{0}$$

Definice Uvažujme lin. zobrazení
$$\varphi : U \to U$$
Vektor $u \in U \setminus \{\vec{o}\}$ se nazývá **vlastní vektor**, jestliže existuje číslo $\lambda \in \mathbb{R}$ takové, že
$$\varphi(u) = \lambda u$$
Číslo λ se nazývá **vlastní číslo**.

Př. $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \varphi(x) = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ jsou vlastní vektory

$$\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

u je vl. vektor s vlastn. číslem -1

$$\varphi\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

v je vlastní vektor s vl. číslem 2

$$2 \cdot u = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A(2u) = A\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\, A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1)\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Všechny nenulové násobky vlastního vektoru jsou vlastní vektory.

Jak hledat vlastní čísla a vlastní vektory

Prvně najdeme vlastní čísla

$\varphi(x) = Ax$ $\qquad \varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

Hledáme $x \neq \vec{o}$ a $\lambda \in \mathbb{R}$ aby

$$Ax = \lambda x$$

$$Ax - \lambda x = 0$$

$$Ax - \lambda E x = 0 \qquad E \text{ jedn. matice}$$

$$(A - \lambda E)\, x = 0$$

Homogenní soustava o n neznámých $x_1, x_2, \dots x_n$ a n rovnicích.

Ta má netriviální, tj. nenulové řešení, právě tehdy

$$\det(A - \lambda E) = 0.$$

$\det(A - \lambda E)$ je polynom stupně n v proměnné λ

$$\det(A - \lambda E) = (-1)^n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0$$

Hledání vlastních čísel znamená řešit polynomiální rovnici

$$(-1)^n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

Polynom stupně $n \geq 1$

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

$\lambda_0 \in \mathbb{R}$ je kořen polynomu p, jestliže

$$p(\lambda_0) = 0.$$

Věta: λ_0 je kořen polynomu p, právě když

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)\, q(\lambda)$$

stupeň $q = n-1$.

Násobnost kořene λ_0 je $k \geq 1$ jestliže k je největší číslo takové, že

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k\, r(\lambda)$$

Zde musí být $r(\lambda_0) \neq 0$.

Vraťme se k vl. číslům

$\det(A - \lambda E)$ se nazývá

Charakteristický polynom.

Jestliže najdeme jeho kořen λ_0, pak vlastní vektor k vl. číslu λ_0 je nenulovým řešením homogenní soustavy

$$(A - \lambda_0 E) X = O$$

Příklad: $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\varphi(x) = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 2 & -3 \\ 4 & 5-\lambda & -4 \\ 6 & 4 & -4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (5-\lambda)(5-\lambda)(-4-\lambda) + 2(-4)\cdot 6 + (-3)\,4\cdot 4 - 6(-3)(5-\lambda) - 4\cdot 2(-4-\lambda) - (5-\lambda)\,4(-4)$$

$$= \dots = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6$$

Pravidlo: Má-li polynom celočíselné koeficienty a u nejvyšší znaménky 1 nebo -1, je každý racionální kořen celé číslo, které dělí absolutní člen a_0.

$$p(\lambda) = \pm \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots a_1\lambda + a_0$$

λ_0 kořen $\lambda_0 \in \mathbb{Q} \Rightarrow \lambda_0 \in \mathbb{Z}$

λ_0 dělí a_0

V našem případě celočíselný kořen dělí $a_0 = 6$

Možnosti $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$

Dosazením zjistíme, že $\lambda_1 = 1$ je kořen.

- $\det(A - \lambda E) = \lambda^3 - \lambda^2 + 11\lambda - 6$

$$= (\lambda - 1)\underbrace{(\lambda^2 - 5\lambda + 6)}$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4\cdot 6}}{2} = \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}$$

Další vl. čísla jsou 2 a 3.

Vl. vektor k 1.

$$(A - 1E)x = 0$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 4 & 4 & -4 \\ 6 & 4 & -5 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Řešení je $\qquad 2x_2 - x_3 = 0$

$$x_3 = 2t$$
$$x_2 = t$$
$$x_1 = t$$

Vlastní vektory jsou $(t, t, 2t) =$
$t \cdot (1, 1, 2) \qquad \lambda_1 = 1 \quad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Obdobně spočítáme vlastní vektory k

$\lambda_2 = 2 \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_3 = 3 \qquad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Vlastní vektory k různým vlastním číslům jsou lin. nezávislé.

Tedy $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}^3$ a především tvoří bázi $\mathbb{R}^3$.

Nechť $\alpha = (u_1, u_2, u_3)$ je jiná báze.

Počítáme φ v souřadnicích báze α. $y_i \in \mathbb{R}$

$$v = y_1 u_1 + y_2 u_2 + y_3 u_3$$

$$\varphi(v) = \varphi(y_1 u_1 + y_2 u_2 + y_3 u_3)$$
$$= y_1 \varphi(u_1) + y_2 \varphi(u_2) + y_3 \varphi(u_3)$$
$$= y_1 1 u_1 + y_2 2 u_2 + y_3 3 u_3$$

Souřadnice obrazu $\varphi(v)$ v bázi α jsou

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} y_1 \\ 2y_2 \\ 3y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Příklad

$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -10 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Char. polynom

$$\det\left| \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -10 & -3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \lambda^2 + 4\lambda + 13$$

diskriminant je

$$4^2 - 4\cdot 13 < 0$$

Polynom nemá reálné kořeny,
nemá nad $\mathbb{R}$ vlastní vektory.

rozklad

Vlastní podprostor pro vlastní číslo λ_0 je $(\varphi : U \to U)$

$$\{ v \in U \setminus \{\vec{o}\},\ \varphi(v) = \lambda_0 v \} \cup \{\vec{o}\}$$

všechny vlastní vektory a vektor $\vec{o}$

$$= \{ v \in U,\ \varphi(v) = \lambda_0 v \}$$

$\dim \geq 1$.

$$\varphi(v_1) = \lambda_0 v_1$$

$$\varphi(v_2) = \lambda_0 v_2$$

$$\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) =$$

$$= \lambda_0 v_1 + \lambda_0 v_2 = \lambda_0 (v_1 + v_2)$$