MB141, 5. 6. 2024, zkouška, skupina A

1.1 [≥ 1 správných, 1 bod] Nechť p je polynom stupně 5 s reálnými koeficienty. Vyberte všechny možnosti, kolik může mít p reálných kořenů, pokud započítáváme i násobnosti u vícenásobných kořenů.

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2

☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

1.2 [≥ 1 správných, 1 bod] Vyberte všechny varianty parametrů a, b, pro něž je matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}.$$

invertibilní.

☐ $a = 1, b = 1$ ☐ $a = 1, b = 0$

☐ $a = -1, b = 1$ ☐ $a = 0, b = 0$

☐ $a = 0, b = 1$ ☐ $a = -1, b = 0$

1.3 [3 body] Najděte všechny racionální kořeny polynomu

$$2x^5 - 3x^4 - x^3 - x^2 - 3x + 2.$$

2.1 [≥ 1 správných, 1 bod] Určete, které z bodů v $\mathbb{R}^2$ se nachází na stejné straně přímky $p : 4x - 5y + 1 = 0$ jako bod $A = [2, 2]$.

☐ $[3, 2]$ ☐ $[5, 4]$

☐ $[-8, -6]$ ☐ $[13, 11]$

2.2 [≥ 1 správných, 1 bod] Vyberte vlastní vektory pro vlastní číslo 2 matice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

☐ $(1, 1, 0)$ ☐ $(1, -1, 0)$ ☐ $(0, 1, 1)$

☐ $(0, 1, -1)$ ☐ $(1, 0, 1)$ ☐ $(1, 0, -1)$

2.3 [3 body] V $\mathbb{R}^3$ najděte vektor o velikosti 6 kolmý na vektory $u = (1, 3, -2), v = (4, 1, 3)$.

3.1 [$\geq$ 1 správných, 1 bod] Najděte primitivní kořeny v modulu 7.

☐ 1 ☐ 2 ☐ 3

☐ 4 ☐ 5 ☐ 6

3.2 [1 správná, 1 bod] Najděte inverzi k prvku 17 v modulu 36.

☐ 11 ☐ 13 ☐ 17

☐ 19 ☐ 23 ☐ 29

3.3 [3 body] Určete zbytek po dělení čísla 9^{9^9} číslem 13. (Připomínáme, že složené umocňování nesplňuje asociativní zákon a podle konvence se počítá „shora dolů".)

4.1 [1 správná, 1 bod] Z tabulky vyberte správného pivota pro eliminační krok simplexového algoritmu.

3	-4	5	200
☐ -1	☐ 2	1	40
☐ 1	☐ 3	3	50
☐ 4	☐ -2	-1	40

4.2 [$\geq$ 1 správných, 1 bod] Rozhodněte, které z matic jsou stochastické (pravděpodobnostní).

☐ $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 \\ 3/4 & 1/2 \end{pmatrix}$

☐ $\begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 \\ 1/2 & 3/4 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$

4.3 [3 body] Hejno krůt se skládá ze tří věkových kategorií odpovídajících sezónám: krůťat, mladých krůt a starých krůt. Krůťata ještě nemívají potomstvo, mladé i staré krůty odchovají za sezónu průměrně dvě krůťata. V chovu nedochází k úhynům. Všechny staré krůty jdou na konci sezóny na porážku a všechny mladé krůty si chovatel ponechává. Určete, jakou část krůťat musí chovatel nabízet k prodeji, aby si chov udržel stabilní.

MB141, 5. 6. 2024, zkouška, skupina B

1.1 [≥ 1 správných, 1 bod] Nechť p je polynom stupně 4 s reálnými koeficienty. Vyberte všechny možnosti, kolik může mít p reálných kořenů, pokud započítáváme i násobnosti u vícenásobných kořenů.

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2

☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

1.2 [≥ 1 správných, 1 bod] Vyberte všechny varianty parametrů a, b, pro něž je matice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}.$$

invertibilní.

☐ $a = 1, b = 1$ ☐ $a = 1, b = 0$

☐ $a = -1, b = 1$ ☐ $a = 0, b = 0$

☐ $a = 0, b = 1$ ☐ $a = -1, b = 0$

1.3 [3 body] Najděte všechny racionální kořeny polynomu

$$2x^5 + x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 5x + 2.$$

2.1 [≥ 1 správných, 1 bod] Určete, které z bodů v $\mathbb{R}^2$ se nachází na stejné straně přímky $p : 5x - 4y - 1 = 0$ jako bod $A = [2, 2]$.

☐ $[2, 3]$ ☐ $[4, 5]$

☐ $[-6, -8]$ ☐ $[11, 13]$

2.2 [≥ 1 správných, 1 bod] Vyberte vlastní vektory pro vlastní číslo 2 matice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

☐ $(1, 1, 0)$ ☐ $(1, -1, 0)$ ☐ $(0, 1, 1)$

☐ $(0, 1, -1)$ ☐ $(1, 0, 1)$ ☐ $(1, 0, -1)$

2.3 [3 body] V $\mathbb{R}^3$ najděte vektor o velikosti 6 kolmý na vektory $u = (3, -2, 1), v = (1, 3, 4)$.

3.1 [≥ 1 správných, 1 bod] Najděte primitivní kořeny v modulu 7.

☐ 1 ☐ 2 ☐ 3

☐ 4 ☐ 5 ☐ 6

3.2 [1 správná, 1 bod] Najděte inverzi k prvku 19 v modulu 36.

☐ 11 ☐ 13 ☐ 17

☐ 19 ☐ 23 ☐ 29

3.3 [3 body] Určete zbytek po dělení čísla 9^{9^9} číslem 13. (Připomínáme, že složené umocňování nesplňuje asociativní zákon a podle konvence se počítá „shora dolů“.)

4.1 [1 správná, 1 bod] Z tabulky vyberte správného pivota pro eliminační krok simplexového algoritmu.

3	−4	5	200
☐ −1	☐ 2	1	30
☐ 4	☐ −2	−1	40
☐ 1	☐ 3	3	50

4.2 [≥ 1 správných, 1 bod] Rozhodněte, které z matic jsou stochastické (pravděpodobnostní).

☐ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 1/2 & 3/4 \\ 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$

☐ $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 3/4 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}$

4.3 [3 body] Hejno krůt se skládá ze tří věkových kategorií odpovídajících sezónám: krůťat, mladých krůt a starých krůt. Krůťata ještě nemívají potomstvo, mladé i staré krůty odchovají za sezónu průměrně tři krůťata. V chovu nedochází k úhynům. Všechny staré krůty jdou na konci sezóny na porážku a všechny mladé krůty si chovatel ponechává. Určete, jakou část krůťat musí chovatel nabízet k prodeji, aby si chov udržel stabilní.

Řešení, skupina A

1.1 Případné ryze komplexní kořeny jsou komplexně sdruženy do párů, reálných kořenů tedy musí zbývat lichý počet, tj. 1, 3, nebo 5.
1.2 V invertibilní matici musí být řádky nezávislé či determinant nenulový. To nastává ve všech případech, v nichž $b \neq 0$.
1.3 Racionální kořeny p/q musí vyhovovat kritériu $p \mid 2$ a $q \mid 2$. Zkoušíme tedy kandidáty z množiny $\{\pm 1, \pm 2, \pm 1/2\}$ a prověřujeme je např. Hornerovým schématem. Vyhovují kořeny $-1, 2, 1/2$.
2.1 Zvolíme bod na přímce p, např. $B = [1,1]$. Následně určíme vzájemnou orientaci směrového vektoru $(5,4)$ a vektoru $\overrightarrow{AB}$ ze znaménka determinantu $\left|\begin{smallmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right|$. Obdobným způsobem místo A dosadíme testované body a zjišťujeme, zda vyjde stejné znaménko. Alternativní postup: Přímka p není rovnoběžná s osou y, lze ji tedy chápat i jako graf lineární funkce. Testované body a bod A můžeme dosazovat do rovnice přímky a posuzovat znaménka „výsledků“.
2.2 Matice $A - 2E$ má hodnost 1, tj. prostor řešení homogenní soustavy $(A - 2E)v = 0$ je dvourozměrný. Řešením jsou všechny vektory kolmé na vektor $(1, 1, -1)$, což jsou mj. 2., 3. a 5. vektor z nabídky.
2.3 Vektor w kolmý na u, v najdeme řešením homogenní soustavy $\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) w = 0$. Řešením je např. $w = (1, -1, -1)$. Ovšem velikost vektoru je $\|w\| = \sqrt{3}$, musíme jej tedy ještě vynásobit koeficientem $6/\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$.
3.1 Pro primitivní kořen x musí platit $x^6 \equiv 1 \pmod 7$ a ne „dříve“, speciálně stačí když $x^2 \not\equiv 1$ a $x^3 \not\equiv 1$. Tomu vyhovují jen zbytky 3 a 5.
3.2 Inverze je 17. Řešíme buďto pomocí Bezoutovy rovnosti, nebo si hledání zjednodušíme rozložením modulu $36 = 4 \cdot 9$.
3.3 Nejprve snížíme exponent využitím malé Fermatovy vety $9^{12} \equiv 1 \pmod{13}$, tj. spočítáme $9^9 \equiv \cdots \equiv 9 \pmod{12}$ (i zde se dal modul rozložit $12 = 3 \cdot 4$ a snadno spočítat $9^9 \equiv 0 \pmod 3$ a $9^9 \equiv 1 \pmod 4$). Následně už řešíme $9^{9^9} \equiv 9^9 \equiv \cdots \equiv 1 \pmod{13}$. Body byly strhávány za počítání exponentu v modulu 13 a zjednodušení úlohy na $9^{9 \cdot 9}$, což není totéž jako 9^{9^9}. (Obě tyto chybné úvahy dávaly náhodou správný výsledek.) Alternativní postup: K nelibosti autora vychází již $9^3 \equiv 1 \pmod{13}$, odkud zřejmě i $9^{9^9} \equiv 1$.
4.1 Pivot se musí nacházet ve sloupci se záporným číslem v 0. řádku, sám musí být kladný a jeho poměr k pravému sloupci musí být maximální. Zde je to tedy hodnota 3.
4.2 Součet ve sloupcích musí být 1 a všechny vstupy matice musí být mezi 0 a 1. Vyhovují 2. a 4. matice.
4.3 Přechod od krůťat k mladým krůtám umenšíme o hledaný parametr p a stabilitu chovu vyjádříme vlastním číslem 1. Leslieho matice tedy je

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1-p & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a o matici $L - E$ předpokládáme, že je singulární (má nulový determinant). Tento požadavek je splněn pro $p = 3/4$. Úlohu bylo možné řešit i „selským rozumem“, ale strhávali jsme body za nedostatečná zdůvodnění. Typickým nešvarem byl předpoklad stejného zastoupení věkových tříd v chovu.

Řešení, skupina B

1.1 Případné ryze komplexní kořeny jsou komplexně sdruženy do párů, reálných kořenů tedy musí zbývat sudý počet, tj. 0, 2, nebo 4.
1.2 V invertibilní matici musí být řádky nezávislé či determinant nenulový. To nastává ve všech případech, v nichž $a \neq 0$.
1.3 Racionální kořeny p/q musí vyhovovat kritériu $p \mid 2$ a $q \mid 2$. Zkoušíme tedy kandidáty z množiny $\{\pm 1, \pm 2, \pm 1/2\}$ a prověřujeme je např. Hornerovým schématem. Vyhovují kořeny $1, -2, 1/2$.
2.1 Zvolíme bod na přímce p, např. $B = [1,1]$. Následně určíme vzájemnou orientaci směrového vektoru $(4,5)$ a vektoru $\overrightarrow{AB}$ ze znaménka determinantu $\left|\begin{smallmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right|$. Obdobným způsobem místo A dosadíme testované body a zjišťujeme, zda vyjde stejné znaménko. Alternativní postup: Přímka p není rovnoběžná s osou y, lze ji tedy chápat i jako graf lineární funkce. Testované body a bod A můžeme dosazovat do rovnice přímky a posuzovat znaménka „výsledků“.
2.2 Matice $A - 2E$ má hodnost 1, tj. prostor řešení homogenní soustavy $(A - 2E)v = 0$ je dvourozměrný. Řešením jsou všechny vektory kolmé na vektor $(1, -1, 1)$, což jsou mj. 1., 3. a 6. vektor z nabídky.
2.3 Vektor w kolmý na u, v najdeme řešením homogenní soustavy $\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) w = 0$. Řešením je např. $w = (1, 1, -1)$. Ovšem velikost vektoru je $\|w\| = \sqrt{3}$, musíme jej tedy ještě vynásobit koeficientem $6/\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$.
3.1 Pro primitivní kořen x musí platit $x^6 \equiv 1 \pmod{7}$ a ne „dříve“, speciálně stačí když $x^2 \not\equiv 1$ a $x^3 \not\equiv 1$. Tomu vyhovují jen zbytky 3 a 5.
3.2 Inverze je 19. Řešíme buďto pomocí Bezoutovy rovnosti, nebo si hledání zjednodušíme rozložením modulu $36 = 4 \cdot 9$.
3.3 Nejprve snížíme exponent využitím malé Fermatovy vety $9^{12} \equiv 1 \pmod{13}$, tj. spočítáme $9^9 \equiv \cdots \equiv 9 \pmod{12}$ (i zde se dal modul rozložit $12 = 3{\cdot}4$ a snadno spočítat $9^9 \equiv 0 \pmod{3}$ a $9^9 \equiv 1 \pmod{4}$). Následně už řešíme $9^{9^9} \equiv 9^9 \equiv \cdots \equiv 1 \pmod{13}$. Body byly strhávány za počítání exponentu v modulu 13 a zjednodušení úlohy na $9^{9 \cdot 9}$, což není totéž jako 9^{9^9}. (Obě tyto chybné úvahy dávaly náhodou správný výsledek.) Alternativní postup: K nelibosti autora vychází již $9^3 \equiv 1 \pmod{13}$, odkud zřejmě i $9^{9^9} \equiv 1$.
4.1 Pivot se musí nacházet ve sloupci se záporným číslem v 0. řádku, sám musí být kladný a jeho poměr k pravému sloupci musí být maximální. Zde je to tedy hodnota 2.
4.2 Součet ve sloupcích musí být 1 a všechny vstupy matice musí být mezi 0 a 1. Vyhovují 3. a 4. matice.
4.3 Přechod od krůťat k mladým krůtám umenšíme o hledaný parametr p a stabilitu chovu vyjádříme vlastním číslem 1. Leslieho matice tedy je

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1-p & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a o matici $L - E$ předpokládáme, že je singulární (má nulový determinant). Tento požadavek je splněn pro $p = 5/6$. Úlohu bylo možné řešit i „selským rozumem“, ale strhávali jsme body za nedostatečná zdůvodnění. Typickým nešvarem byl předpoklad stejného zastoupení věkových tříd v chovu.