MB141, 28. 5. 2024, zkouška, skupina A

1.1 [1 správná, 1 bod] Najděte inverzní (převrácené) komplexní číslo k číslu $\sqrt{3}+i$.

☐ $\sqrt{3}-i$
☐ $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$
☐ $\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{4}i$
☐ $\sqrt{3}+i$
☐ $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$
☐ $\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{4}i$

1.2 [$\geq$ 1 správných, 1 bod] Nechť

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Z variant vyberte ty, pro něž $\det A = 0$.

☐ $a = 2, b = 1$ ☐ $a = -1, b = 1$
☐ $a = 0, b = 2$ ☐ $a = -1, b = 0$
☐ $a = 2, b = 0$ ☐ $a = 0, b = -1$

1.3 [3 body] Najděte nějaké celočíselné řešení x, y rovnice

$$234x + 345y = 3$$

2.1 [1 správná, 1 bod] Určete odchylku vektorů $u = (1,2,3), v = (-2,3,1)$ v $\mathbb{R}^3$.

☐ 0 ☐ $\pi/6$
☐ $\pi/4$ ☐ $\pi/3$
☐ $\pi/2$ ☐ $2\pi/3$

2.2 [$\geq$ 1 správných, 1 bod] Nechť A je matice lineární transformace $f : V \to V$ vektorového prostoru V, λ vlastní číslo a v příslušný vlastní vektor.

☐ $f(v) = \lambda v$, ☐ $\lambda f(v) = v$,
☐ $Av = \lambda v$, ☐ $\det(A - \lambda E) = 1$,
☐ $v \neq 0$, ☐ $(A - \lambda E)v = 0$.

2.3 [3 body] Určete matici lineárního zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, o němž je známo:

$$f(0,1,-1) = (3,1,1),$$
$$f(1,1,1) = (0,3,0),$$
$$f(2,0,1) = (0,1,-2).$$

3.1 [1 správná, 1 bod] Určete hodnotu Eulerovy funkce ϕ v $n = 240$.

☐ 180 ☐ 120 ☐ 80
☐ 64 ☐ 48 ☐ 36

3.2 [$\geq$ 1 správných, 1 bod] Nechť n je modul, g primitivní kořen a a, b soukromé klíče komunikujících stran. Určete, které z parametrů lze zveřejnit:

☐ g ☐ n ☐ g^a
☐ g^b ☐ g^{ab} ☐ ab

3.3 [3 body] Řešte soustavu kongruencí (a zapište výsledek v obecném tvaru).

$$x \equiv 2 \pmod{12}$$
$$x \equiv 8 \pmod{10}$$

4.1 [1 správná, 1 bod] Určete stý člen rekurentní posloupnosti $x_{n+2} = 5x_{n+1} - 6x_n, x_0 = 1, x_1 = 1$.

☐ $1 + 3^{100}$ ☐ $-3^{101} + 2^{99}$
☐ $2^{101} - 3^{100}$ ☐ $2^{99} - 1$
☐ $3^{100} - 2^{100}$ ☐ $2^{100} - 3^{101}$

4.2 [$\geq$ 1 správných, 1 bod] Rozhodněte, které z matic jsou stochastické (pravděpodobnostní).

☐ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 \\ 1/2 & 2/3 \end{pmatrix}$
☐ $\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 2/3 \end{pmatrix}$

4.3 [3 body] Truhlářství vyrábí stoly, židle a poličky. Na výrobu jednoho stolu potřebuje 3 hodiny, jedné židle 2 hodiny a jedné poličky 1 hodinu. Výrobní kapacita truhlářství je 60 hodin a celkově lze vyrobit nejvýše 40 výrobků. Poliček se vyrobí nejvýše tolik, kolik se dohromady vyrobí stolů a židlí. Zisk z jedoho stolu je 1000 Kč, z jedné židle 800 Kč a z jedné poličky 600 Kč.

a) [1 bod] Zformulujte příklad jako úlohu lineárního programování.

b) [2 body] Užitím simplexového algoritmu určete optimální skladbu výroby a celkový zisk.

MB141, 28. 5. 2024, zkouška, skupina B

1.1 [1 správná, 1 bod] Najděte inverzní (převrácené) komplexní číslo k číslu $\sqrt{2}-\sqrt{2}i$.

☐ $\sqrt{2}-\sqrt{2}i$
☐ $\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$
☐ $\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}i$
☐ $\sqrt{2}+\sqrt{2}i$
☐ $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$
☐ $\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}i$

1.2 [$\geq$ 1 správných, 1 bod] Nechť

$$A=\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Z variant vyberte ty, pro něž $\det A = 0$.

☐ $a=2, b=1$ ☐ $a=-1, b=1$
☐ $a=0, b=2$ ☐ $a=-1, b=0$
☐ $a=2, b=0$ ☐ $a=0, b=-1$

1.3 [3 body] Najděte nějaké celočíselné řešení x, y rovnice

$$123x+345y=3$$

2.1 [1 správná, 1 bod] Určete odchylku vektorů $u=(1,2,3), v=(2,-3,-1)$ v $\mathbb{R}^3$.

☐ 0 ☐ $\pi/6$
☐ $\pi/4$ ☐ $\pi/3$
☐ $\pi/2$ ☐ $2\pi/3$

2.2 [$\geq$ 1 správných, 1 bod] Nechť A je matice lineární transformace $f: V \to V$ vektorového prostoru V, λ vlastní číslo a v příslušný vlastní vektor.

☐ $f(v)=\lambda v,$ ☐ $\lambda f(v)=v,$
☐ $Av=\lambda v,$ ☐ $\det(A-\lambda E)=-1,$
☐ $v=0,$ ☐ $(A-\lambda E)v=0.$

2.3 [3 body] Určete matici lineárního zobrazení $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, o němž je známo:

$$\begin{aligned} f(1,-1,0)&=(1,1,3),\\ f(1,1,1)&=(3,0,0),\\ f(0,1,2)&=(1,-2,0). \end{aligned}$$

3.1 [1 správná, 1 bod] Určete hodnotu Eulerovy funkce ϕ v $n = 300$.

☐ 180 ☐ 120 ☐ 80
☐ 64 ☐ 48 ☐ 36

3.2 [$\geq$ 1 správných, 1 bod] Nechť n je modul, g primitivní kořen a a, b soukromé klíče komunikujících stran. Určete, které z parametrů lze zveřejnit:

☐ g ☐ n ☐ g^a
☐ g^b ☐ g^{ab} ☐ ab

3.3 [3 body] Řešte soustavu kongruencí (a zapište výsledek v obecném tvaru).

$$x \equiv 8 \pmod{12}$$
$$x \equiv 2 \pmod{10}$$

4.1 [1 správná, 1 bod] Určete stý člen rekurentní posloupnosti $x_{n+2} = 5x_{n+1} - 6x_n, x_0 = 0, x_1 = 1$.

☐ $1 + 3^{100}$ ☐ $-3^{101} + 2^{99}$
☐ $2^{101} - 3^{100}$ ☐ $2^{99} - 1$
☐ $3^{100} - 2^{100}$ ☐ $2^{100} - 3^{101}$

4.2 [$\geq$ 1 správných, 1 bod] Rozhodněte, které z matic jsou stochastické (pravděpodobnostní).

☐ $\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 2/3 \end{pmatrix}$
☐ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 \\ 1/2 & 2/3 \end{pmatrix}$

4.3 [3 body] Truhlářství vyrábí stoly, židle a poličky. Na výrobu jednoho stolu potřebuje 3 hodiny, jedné židle 2 hodiny a jedné poličky 1 hodinu. Výrobní kapacita truhlářství je 60 hodin a celkově lze vyrobit nejvýše 40 výrobků. Poliček se vyrobí nejvýše tolik, kolik se dohromady vyrobí stolů a židlí. Zisk z jedoho stolu je 1000 Kč, z jedné židle 800 Kč a z jedné poličky 600 Kč.

a) [1 bod] Zformulujte příklad jako úlohu lineárního programování.

b) [2 body] Užitím simplexového algoritmu určete optimální skladbu výroby a celkový zisk.

ŘEŠENÍ, SKUPINA A

1.1 $\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i$
1.2 Úloha se nejsnáze řeší Laplaceovým rozvojem podle prvního řádku. Determinant doplňku k a je nulový, k b je to jednička. Odtud plyne, že a může být jakékoli a b musí být nula. Vybereme tedy 4. a 5. možnost.
1.3 V úloze jde o nalezení koeficientů do Bezoutovy rovnosti, které umíme spočítat rozšířeným Eukleidovým algoritmem. Výsledek $x = -28, y = 19$.
2.1 Odchylku ϕ určíme ze vzorce

$$\cos \phi \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\|v\|} = \frac{7}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{14}} = \frac{1}{2},$$

tedy $\phi = \pi/3$.
2.2 Pravdivé jsou 1., 3., 5. a 6. odpověď.
2.3 Vektory a jejich obrazy přepíšeme řádkově do maticového schématu, úpravou levé části na jednotkovou matici zjistíme obrazy prvků standardní báze a transpozice pravé části je tak již hledanou maticí zobrazení:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3.1 Využijeme rozkladu $240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$. Odtud $\phi(240) = 2^3 \cdot 2 \cdot 4 = 64$.
3.2 Zveřejnit můžeme n, g, g^a, g^b. Určitě nezveřejníme g^{ab}, což je společný soukromý šifrovací klíč, ani ab, ze kterého bychom jej spolu se znalostí g snadno určili.
3.3 Nejprve rozložíme moduly a soustavu převedeme na eklivalentní, jež už splňuje předpoklady čínské zbytkové věty:

$$\begin{aligned} x &\equiv 2 \pmod 4 \\ x &\equiv 2 \pmod 3 \\ x &\equiv 3 \pmod 5 \end{aligned}$$

První dvě kongruence můžeme nechat sloučené $x \equiv 2 \pmod{12}$. Úlohu dořešíme dosazením $x = 12a + 2$ do třetí kongruence (nebo vyzkoušením kandidátů $2, 14, 26, 38, 50$). Řešení je jednoznačné až na násobek nejmenšího společného násobku modulů, tj. 60. Výsledek je tedy nutné uvést ve tvaru $x \equiv 38 \pmod{60}$.
4.1 Charakteristický polynom posloupnosti $x^2 - 5x + 6$ má kořeny $2, 3$, obecné řešení tedy hledáme ve tvaru $x_n = a2^n + b3^n$. Dosazením počátečních podmínek pro $n = 0, 1$ dostaneme soustavu rovnic pro a, b, jejíž řešení je $a = 2, b = -1$. Stým členem posloupnosti je tedy 3. možnost.
4.2 Stochastická matice musí mít ve všech buňkách pravděpodobnosti, tj. čísla mezi 0 a 1, a součet v každém sloupci musí být 1. Požadavku vyhovují 3. a 4. matice.

4.3 a)

$$
\begin{aligned}
3s + 2z + p &\leq 60 \\
s + z + p &\leq 40, \\
-s - z + p &\leq 0, \\
s, z, p &\geq 0, \\
1000s + 800z + 600p &= c
\end{aligned}
$$

b) Při zvoleném pořadí neznámých vybíráme v tabulce simplexového algoritmu dvakrát pivota z omezení $3s+2z+p \leq 60$ a jednou z omezení $s+z+p \leq 40$. Nalezeným optimem je výroba 20 židlí a 20 poliček (a žádného stolu), což generuje zisk 28 000 Kč.

Řešení, skupina B

1.1 $\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}i$
1.2 Úloha se nejsnáze řeší Laplaceovým rozvojem podle prvního řádku. Determinant doplňku k b je nulový, k a je to jednička. Odtud plyne, že b může být jakékoli a a musí být nula. Vybereme tedy 3. a 6. možnost.
1.3 V úloze jde o nalezení koeficientů do Bezoutovy rovnosti, které umíme spočítat rozšířeným Eukleidovým algoritmem. Výsledek $x = -14, y = 5$.
2.1 Odchylku ϕ určíme ze vzorce

$$\cos\phi \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\|v\|} = \frac{-7}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{14}} = -\frac{1}{2},$$

tedy $\phi = 2\pi/3$.
2.2 Pravdivé jsou 1., 3. a 6. odpověď.
2.3 Vektory a jejich obrazy přepíšeme řádkově do maticového schématu, úpravou levé části na jednotkovou matici zjistíme obrazy prvků standardní báze a transpozice pravé části je tak již hledanou maticí zobrazení:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & | & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

3.1 Využijeme rozkladu $300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$. Odtud $\phi(300) = 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 = 80$.
3.2 Zveřejnit můžeme n, g, g^a, g^b. Určitě nezveřejníme g^{ab}, což je společný soukromý šifrovací klíč, ani ab, ze kterého bychom jej spolu se znalostí g snadno určili.
3.3 Nejprve rozložíme moduly a soustavu převedeme na eklivalentní, jež už splňuje předpoklady čínské zbytkové věty:

$$
\begin{aligned}
x &\equiv 0 \pmod 4 \\
x &\equiv 2 \pmod 3 \\
x &\equiv 2 \pmod 5
\end{aligned}
$$

Druhé dvě kongruence rovnou sloučíme do $x \equiv 2 \pmod{15}$. Úlohu dořešíme dosazením $x = 15a+2$ do první kongruence (nebo vyzkoušením kandidátů $2, 17, 32, 47$). Řešení je jednoznačné až na násobek nejmenšího společného násobku modulů, tj. 60. Výsledek je tedy nutné uvést ve tvaru $x \equiv 32 \pmod{60}$.

4.1 Charakteristický polynom posloupnosti $x^2 - 5x + 6$ má kořeny $2, 3$, obecné řešení tedy hledáme ve tvaru $x_n = a2^n + b3^n$. Dosazením počátečních podmínek pro $n = 0, 1$ dostaneme soustavu rovnic pro a, b, jejíž řešení je $a = -1, b = 1$. Stým členem posloupnosti je tedy 5. možnost.

4.2 Stochastická matice musí mít ve všech buňkách pravděpodobnosti, tj. čísla mezi 0 a 1, a součet v každém sloupci musí být 1. Požadavku vyhovují 1. a 2. matice.

4.3 a)

$$\begin{aligned} 3s + 2z + p &\leq 60 \\ s + z + p &\leq 40, \\ -s - z + p &\leq 0, \\ s, z, p &\geq 0, \\ 1000s + 800z + 600p &= c \end{aligned}$$

b) Při zvoleném pořadí neznámých vybíráme v tabulce simplexového algoritmu dvakrát pivota z omezení $3s + 2z + p \leq 60$ a jednou z omezení $s + z + p \leq 40$. Nalezeným optimem je výroba 20 židlí a 20 poliček (a žádného stolu), což generuje zisk 28 000 Kč.